CIRCUITOS ELÉTRICOS II

4ª Termo

Engenharias:

Elétrica
Mecânica
Computação

PROF. DR. GIULIANO PIERRE ESTEVAM

www.electroenge.com.br

ELECTROENGE

Conteúdo

13

Correntes e Tensões Alternadas Senoidais

13.1 Introdução 370
13.2 Tensão alternada senoidal: características e sefinições 370
13.3 A senóide 375
13.4 Expressão geral para tensões ou correntes senoidais 377
13.5 Relações de fase 379
13.6 Valor médio 382
13.7 Valor eficaz 387

14

Os Dispositivos Básicos e os Fasores 406

14.6 Números complexos 419
14.7 Forma retangular 420
14.8 Forma polar 420
14.9 Conversão entre as duas formas 421
14.10 Operações matemáticas com números complexos 422
14.12 Fasores 430
14.3 Resposta dos dispositivos básicos *R*, *L* e *C* a uma tensão ou corrente senoidal 407
14.4 Respostas em freqüência dos dispositivos básicos 414
14.11 Uso de calculadoras e métodos computacionais nas operações com números complexos 427

Conteúdo

15

Circuitos de Correntes Alternadas em Série e em Paralelo

15.1 Introdução 443
15.2 Impedância e o diagrama de fasores 443
15.3 Configuração em série 447
15.4 Regra dos divisores de tensão 453
15.5 Resposta em freqüência de um circuito *R-C* 455
15.6 Circuitos CA em série — resumo 458
15.7 Admitância e susceptância 459
15.8 Circuitos CA em paralelo 462
15.9 Regra dos divisores de corrente 466
15.10 Resposta em freqüência do circuito *R-L* paralelo 467
15.11 Circuitos CA em paralelo — resumo 470
15.12 Circuitos equivalentes 470

16

Circuitos de Corrente Alternada em Série-Paralelo

16.1 Introdução 491
16.2 Exemplos ilustrativos 491
16.3 Circuitos em cascata 498

17

Métodos de Análise e Tópicos Selecionados (Corrente Alternada)

17.3 Conversões de fontes 514
17.4 Análise de malhas 515
17.5 Análise nodal 521
17.7 Conversões Δ-Y e Y-Δ 531

Conteúdo

18

Teoremas sobre Circuitos (Corrente Alternada)

18.1 Introdução 543
18.2 Teorema da superposição 543
18.3 Teorema de Thévenin 548
18.4 Teorema de Norton 556
18.5 Teorema da máxima transferência de potência 561

19

Potência (CA)

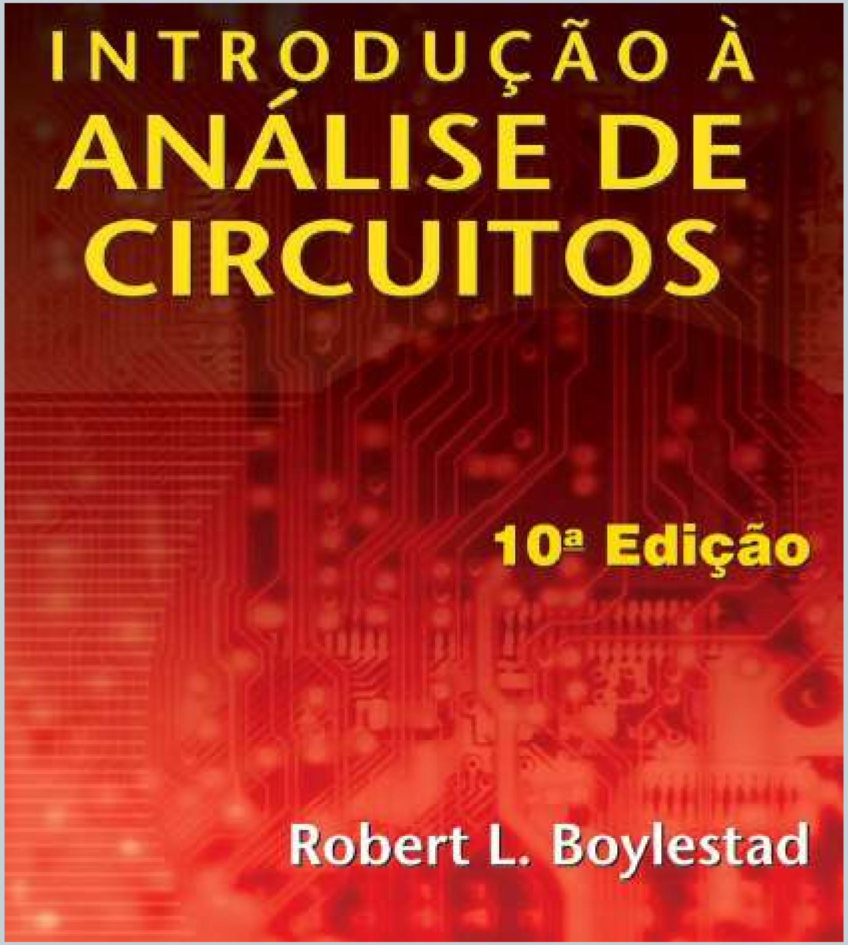
19.1 Introdução 581
19.2 Circuitos resistivos 581
19.3 Potência aparente 582
19.4 Circuitos indutivos e potência reativa 583
19.5 Circuitos capacitivos 585
19.6 O triângulo de potências 586
19.7 As potências P, Q e S totais 587
19.8 Correção do fator de potência 590

Avaliação

MF = 0,5 NP + 0,5 MT

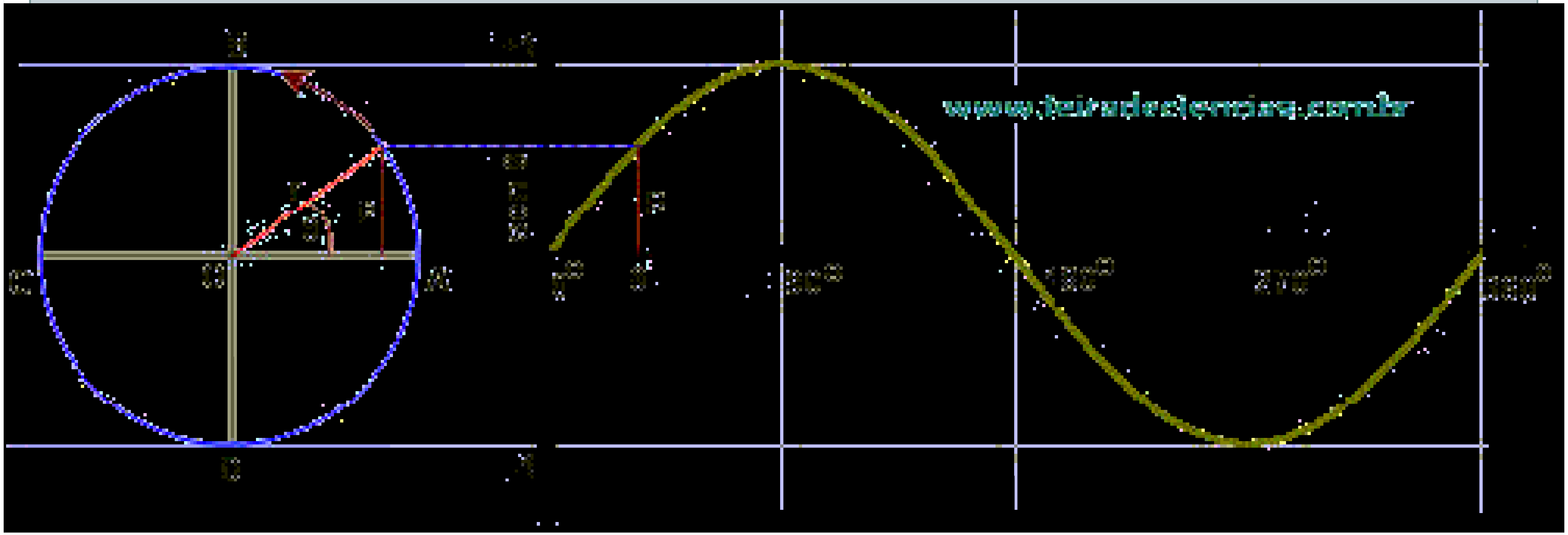
$$MT = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} NT_n$$

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

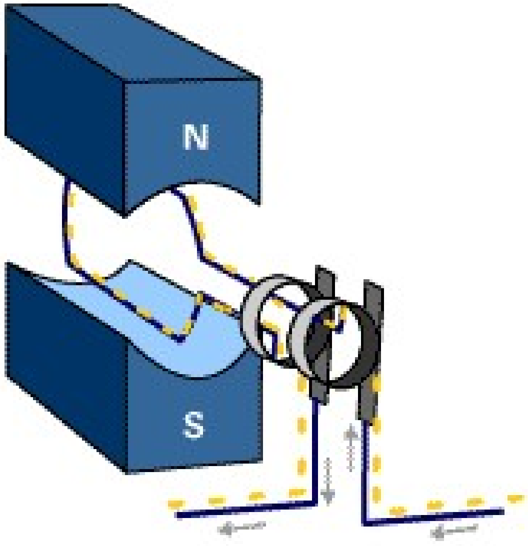


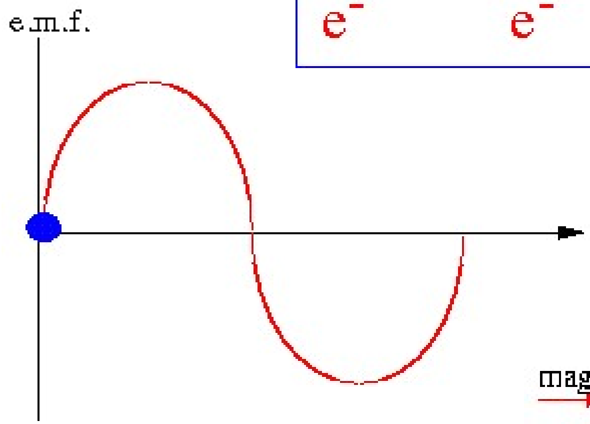
Geração de uma Tensão Alternada

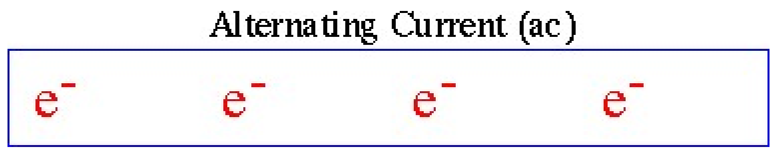
A curva senoidal é o gráfico do seno de um ângulo (em geral expresso em radianos) traçada em função do ângulo; qualquer onda dessa forma é denominada de senoidal, senóide ou ainda sinusóide.

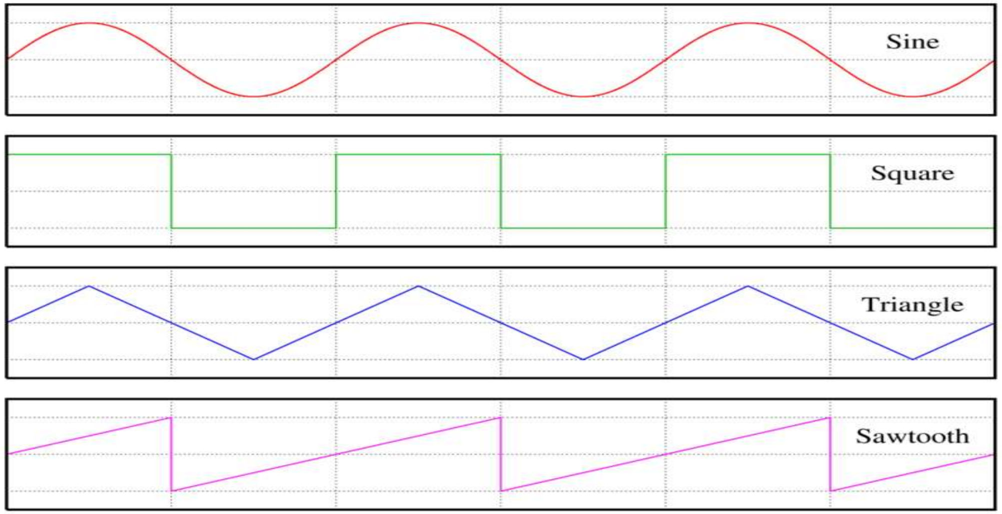


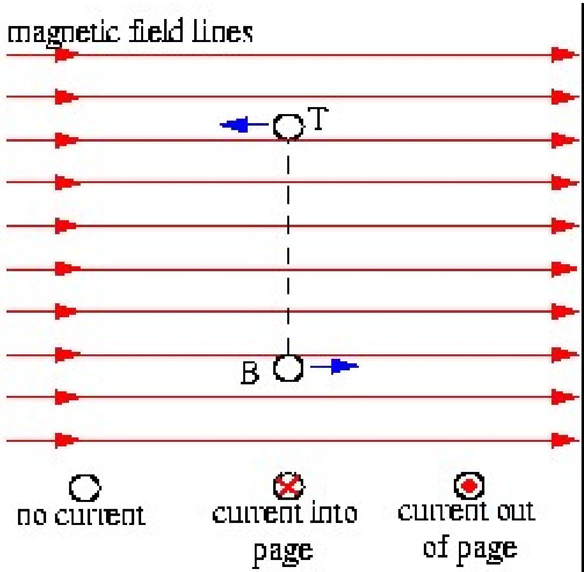
Geração de uma Tensão Alternada



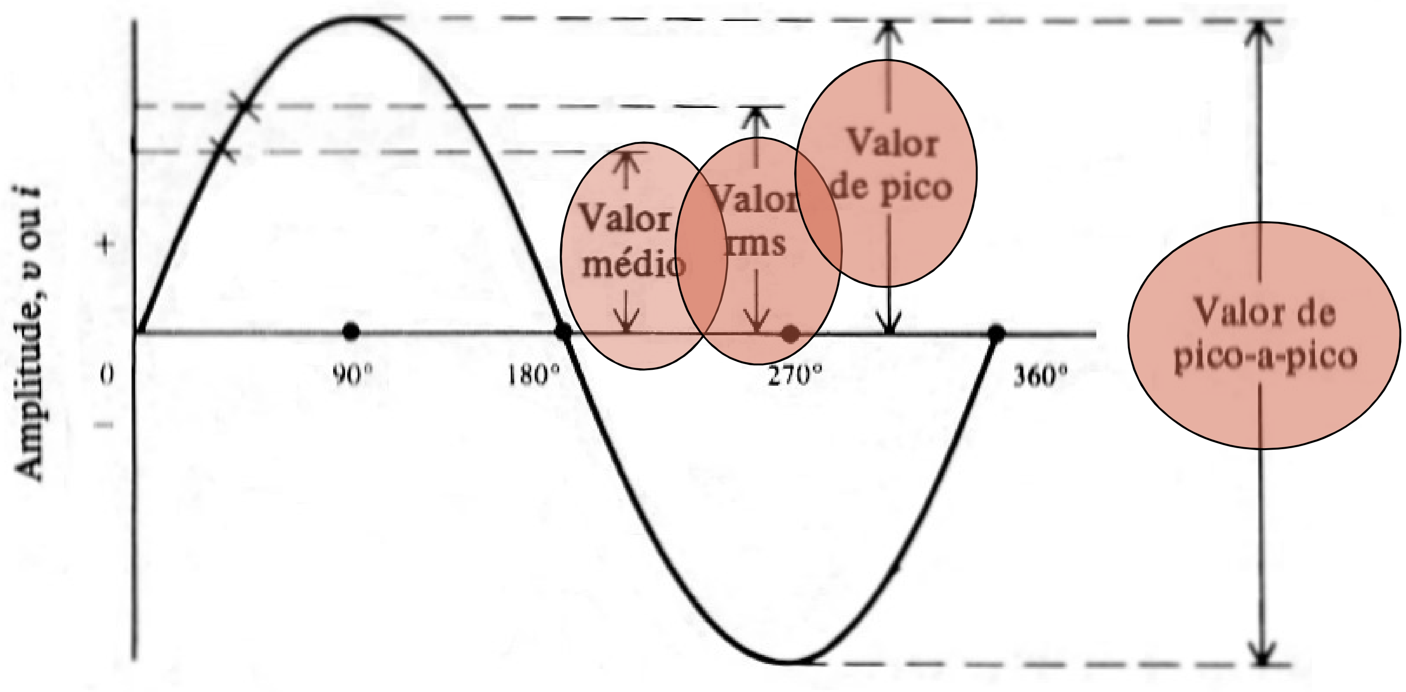








Valores de Amplitude de uma Onda Senoidal



$$v(t) = V_p\, sen(\omega t + \varphi)$$

Conceitos básicos

PERÍODO [T]: TEMPO TRANSCORRIDO EM UMA OSCILAÇÃO COMPLETA

FREQUENCIA [f]: $$f = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ oscilações\ completas}{tempo\ transcorrido}\ \text{(Hz)}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

VELOCIDADE ANGULAR [ω]:

$$\omega = 2\pi f\ \text{(rad/s)}$$

Exercícios

18. Calcule a amplitude e a freqüência a partir das seguintes funções:

a. $20 \text{ sen } 377t$

b. $5 \text{ sen } 754t$

c. $10^6 \text{ sen } 10{,}000t$

d. $0{,}001 \text{ sen } 942t$

e. $-7{,}6 \text{ sen } 43{,}6t$

f. $(\frac{1}{42}) \text{ sen } 6{,}283t$

19. Faça o esboço do gráfico da função $5 \text{ sen } 754t$ usando como unidade do eixo das abscissas:

a. o ângulo em graus;

b. o ângulo em radianos;

c. o tempo em segundos.

Exercícios

4. Calcule o período de uma onda cuja freqüência é:
   a. 25 Hz. b. 35 MHz.
   c. 55 kHz. d. 1 Hz.
5. Calcule a freqüência de uma onda cujo período é:
   a. 1/60 s. b. 0,01 s.
   c. 34 ms. d. 25 μs.
6. Calcule o período de uma onda senoidal que completa 80 ciclos em 24 ms.
7. Se uma forma de onda periódica tem uma freqüência de 20 Hz, qual o tempo (em segundos) necessário para completar 5 ciclos?
8. Qual a freqüência de uma onda periódica que completa 42 ciclos em 6 segundos?

Exercícios

11. Converta os valores dos seguintes ângulos de graus para radianos:

a. 45° **b.** 60°
c. 120° **d.** 270°
e. 178° **f.** 221°

12. Converta os ângulos a seguir de radianos para graus:

a. $\pi/4$ **b.** $\pi/6$
c. $\frac{1}{10}\pi$ **d.** $\frac{7}{6}\pi$
e. 3π **f.** $0{,}55\pi$

13. Determine a velocidade angular de uma onda cujo período é:

a. 2 s. **b.** 0,3 ms.
c. 4 μs. **d.** $\frac{1}{26}$ s.

14. Determine a velocidade angular de uma onda cuja freqüência é:

a. 50 Hz. **b.** 600 Hz.
c. 2 kHz. **d.** 0,004 MHz.

15. Determine a freqüência e o período de ondas senoidais que têm como velocidade angular os valores a seguir:

a. 754 rad/s. **b.** 8,4 rad/s.
c. 6.000 rad/s. **d.** $\frac{1}{16}$ rad/s.

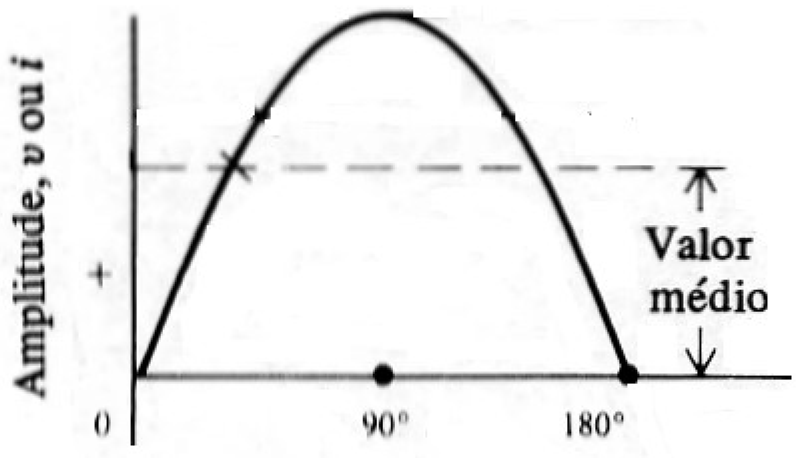
Valor médio

Valor Médio - calculado sobre meio ciclo:

$$V_{MED} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} V_M sen(\omega t)\, dt$$

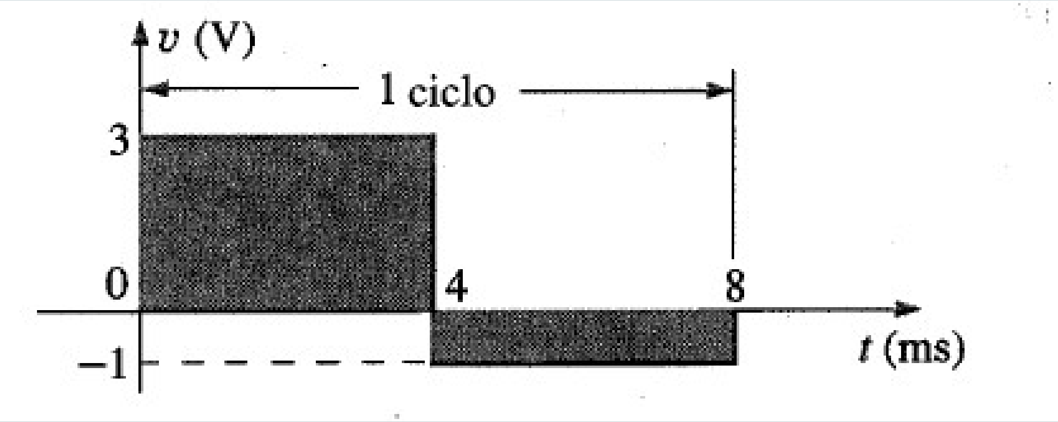
$$V_{MED} = \frac{2}{\omega T}\left[-V_M cos(\omega t)\right]_0^{T/2}$$

$$V_{MED} = \frac{2}{\pi}V_M$$

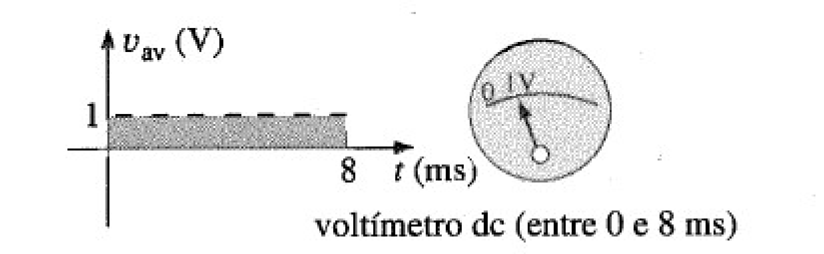


O valor médio para qualquer onda senoidal em um ciclo completo é zero.

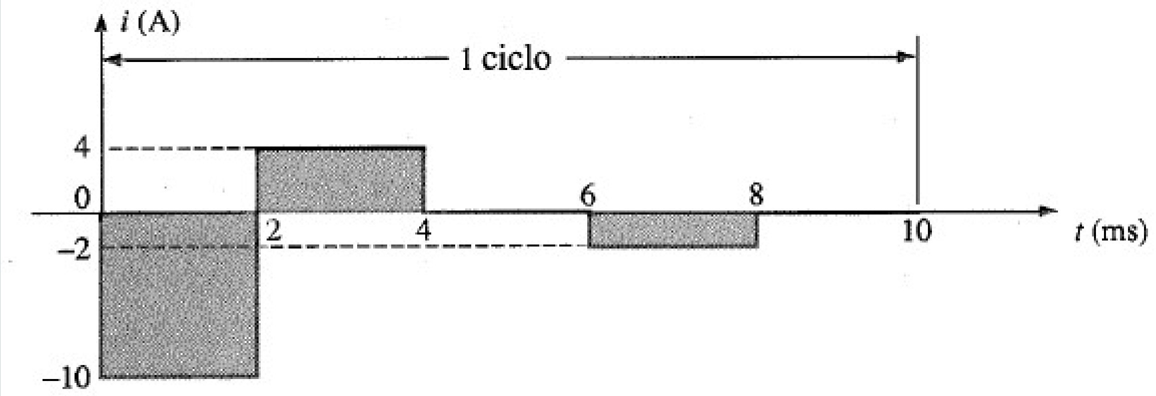
EXEMPLOS – valor médio



$$G = \frac{+(3\text{ V})(4\text{ ms}) - (1\text{ V})(4\text{ ms})}{8\text{ ms}} = \frac{12\text{ V} - 4\text{ V}}{8} = \mathbf{1\ V}$$

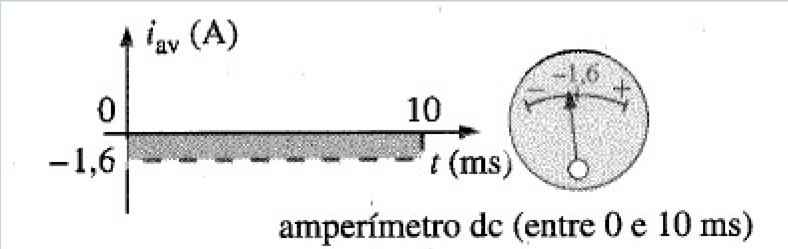


EXEMPLOS – valor médio



$$G = \frac{-(10\text{ V})(2\text{ ms}) + (4\text{ V})(2\text{ ms}) - (2\text{ V})(2\text{ ms})}{10\text{ ms}}$$

$$= \frac{-20\text{ V} + 8\text{ V} - 4\text{ V}}{10} = -\frac{16\text{ V}}{10} = \mathbf{-1{,}6\text{ V}}$$



Valor Eficaz

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [V_M sen(\omega t)]^2\, dt}$$

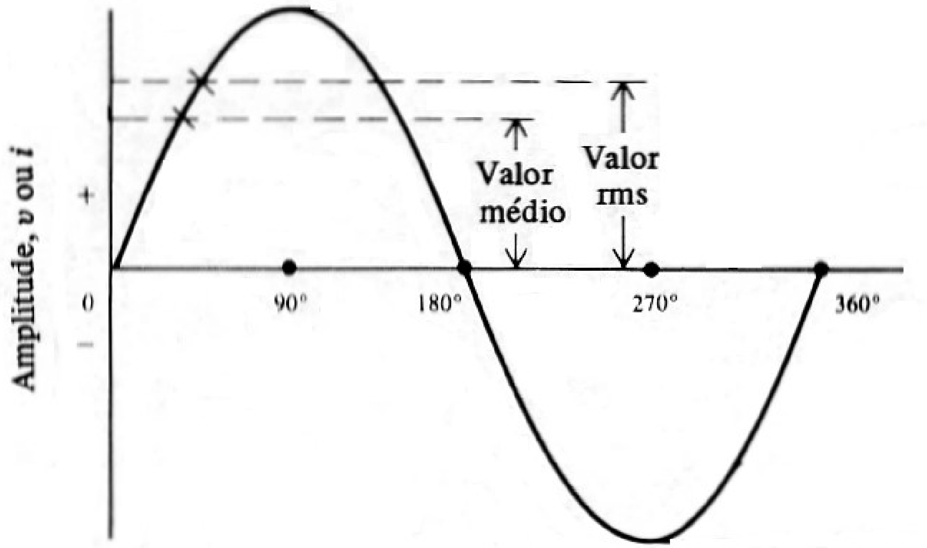
$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_M^2}{T}\int_0^T \left[\frac{1-cos(\omega t}{2}\right]dt}$$

$$V_{RMS} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

rms : root mean square

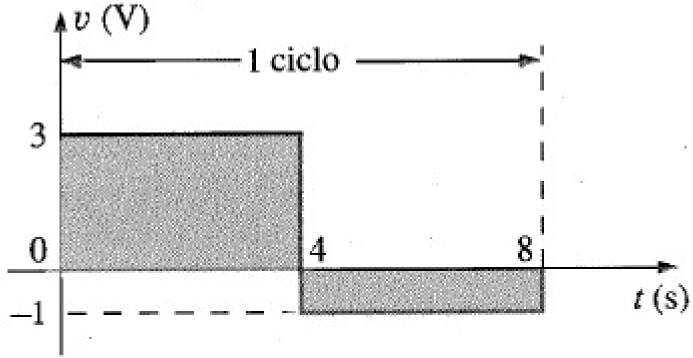
Ex. PROVAR

$$V_{RMS} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$



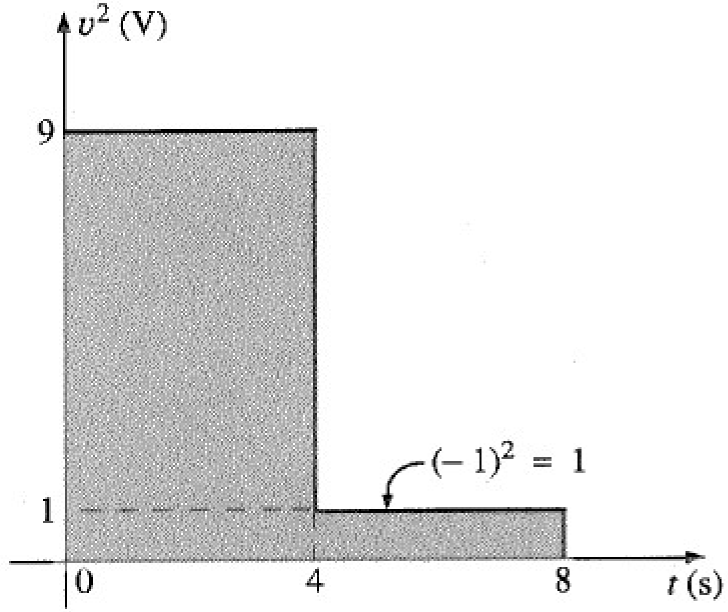
Define-se valor eficaz da corrente como o valor que deveria ter uma corrente contínua para produzir na resistência o mesmo efeito calorífico que produz a corrente alternada.

EXEMPLOS – valor eficaz

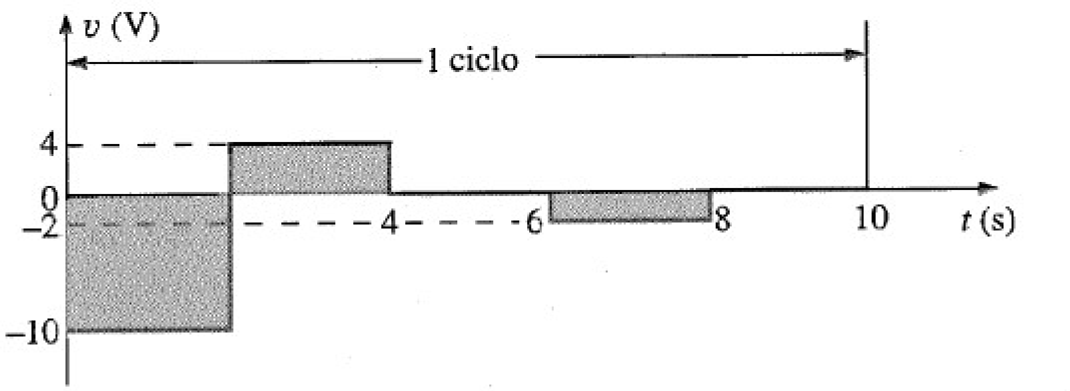


$$I_{ef} = \sqrt{\frac{\text{área } (i^2(t))}{T}}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{(9)(4) + (1)(4)}{8}} = \sqrt{\frac{40}{8}} = \mathbf{2{,}236\ V}$$



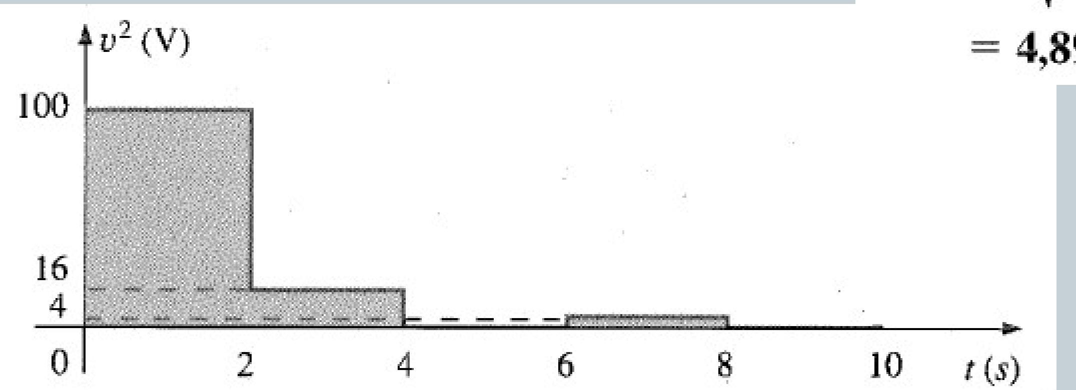
EXEMPLOS – valor eficaz



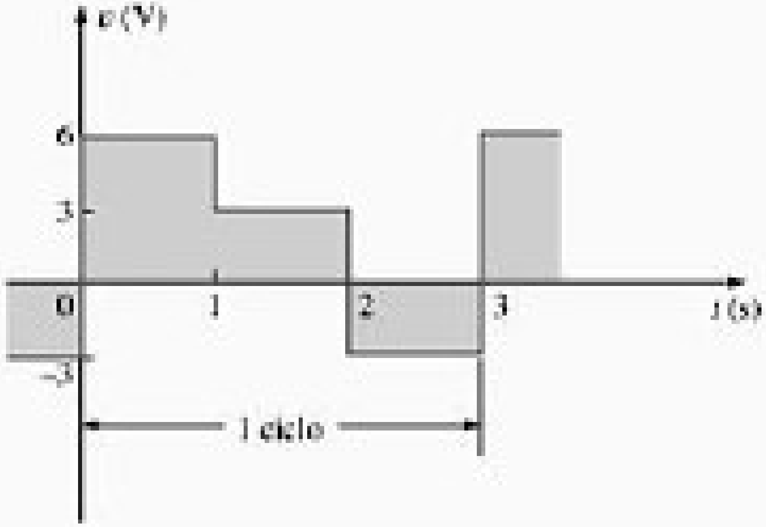
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{\text{área } (i^2(t))}{T}}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{(100)(2) + (16)(2) + (4)(2)}{10}} = \sqrt{\frac{240}{10}}$$

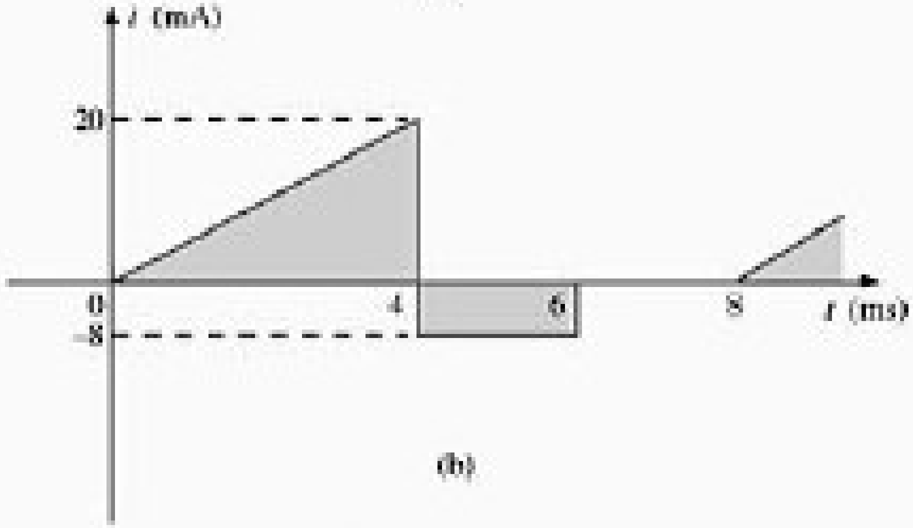
$$= \mathbf{4{,}899\ V}$$



Calcule o valor médio a partir das formas de onda periódicas vistas na Figura 13.93.

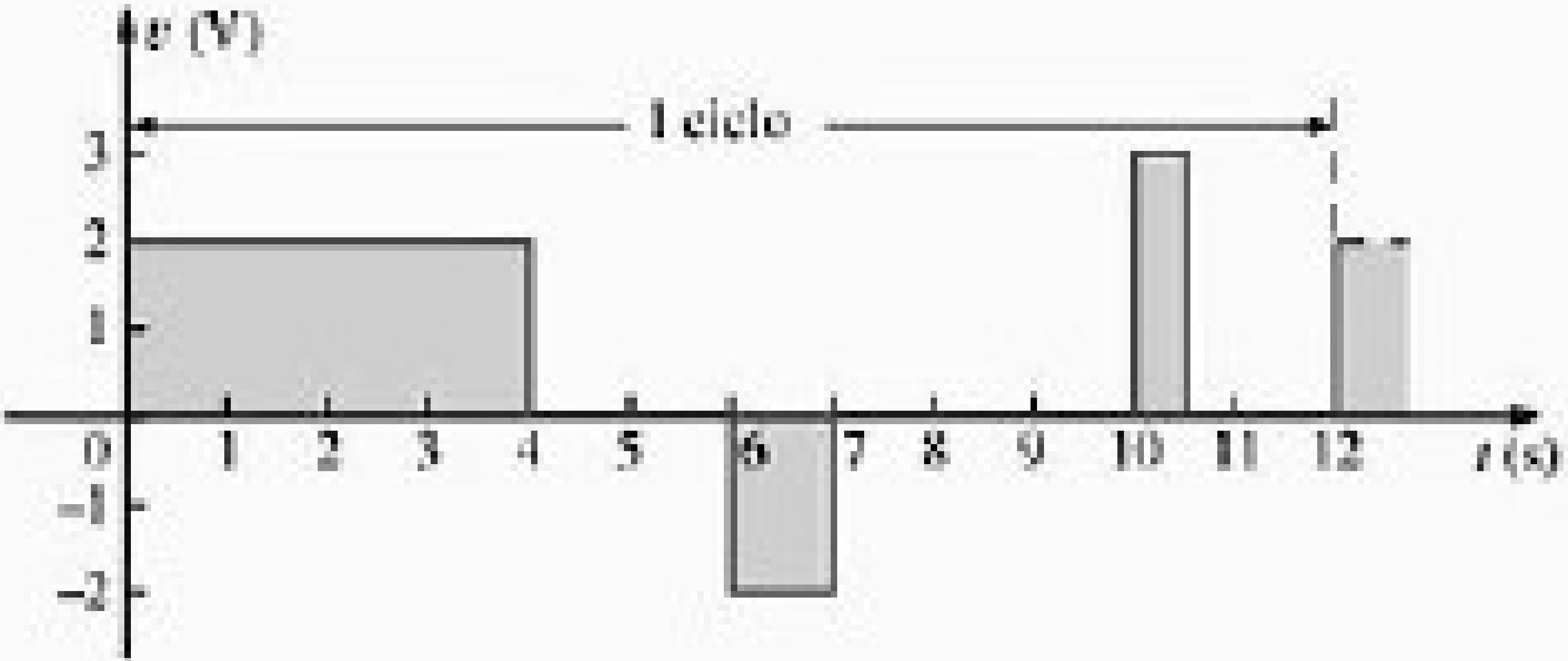


(a)

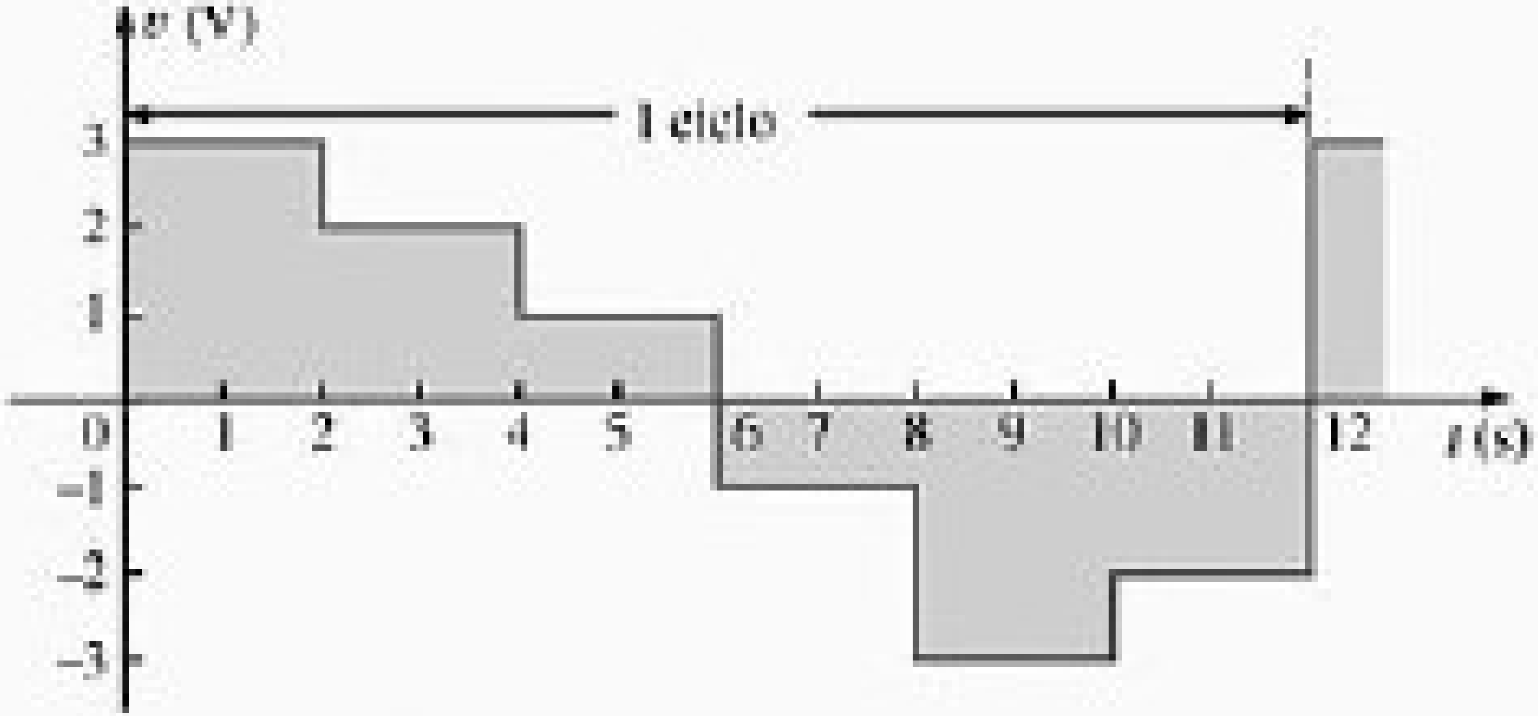


(b)

Determine o valor rms da forma de onda periódica da Figura 13.97.



Determine o valor rms da forma de onda periódica da Figura 13.98.

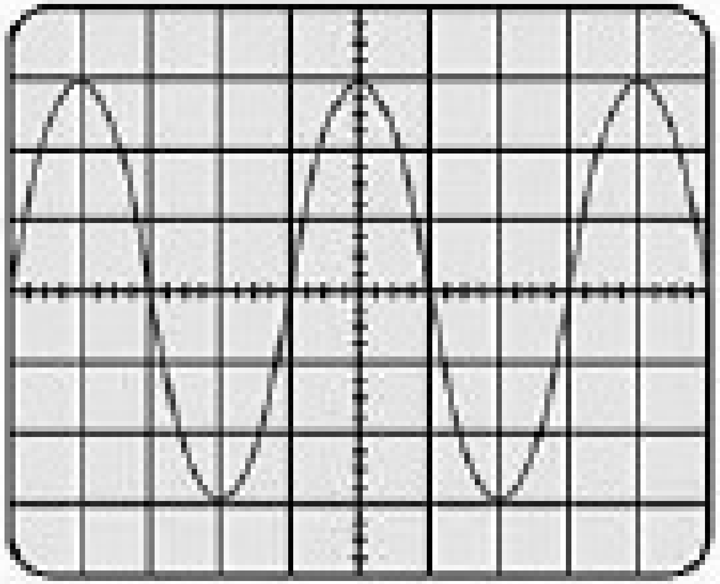


Para a forma de onda que aparece na tela de um osciloscópio mostrada na Figura 13.86:

a. Determine a amplitude de pico.

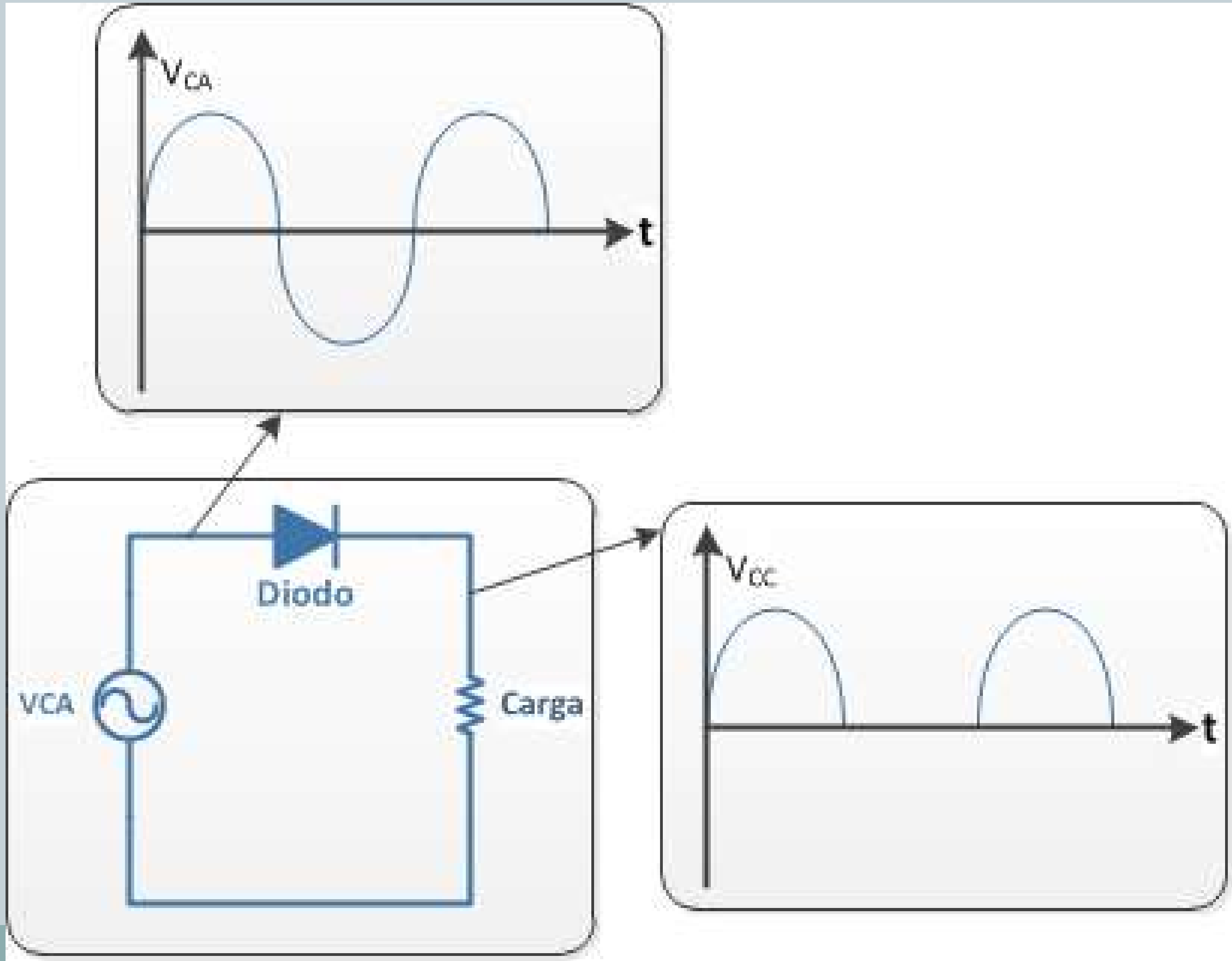
b. Determine o período.

c. Calcule a freqüência.



Sensibilidade vertical = 50 mV/div.
Sensibilidade horizontal = 10 µs/div.

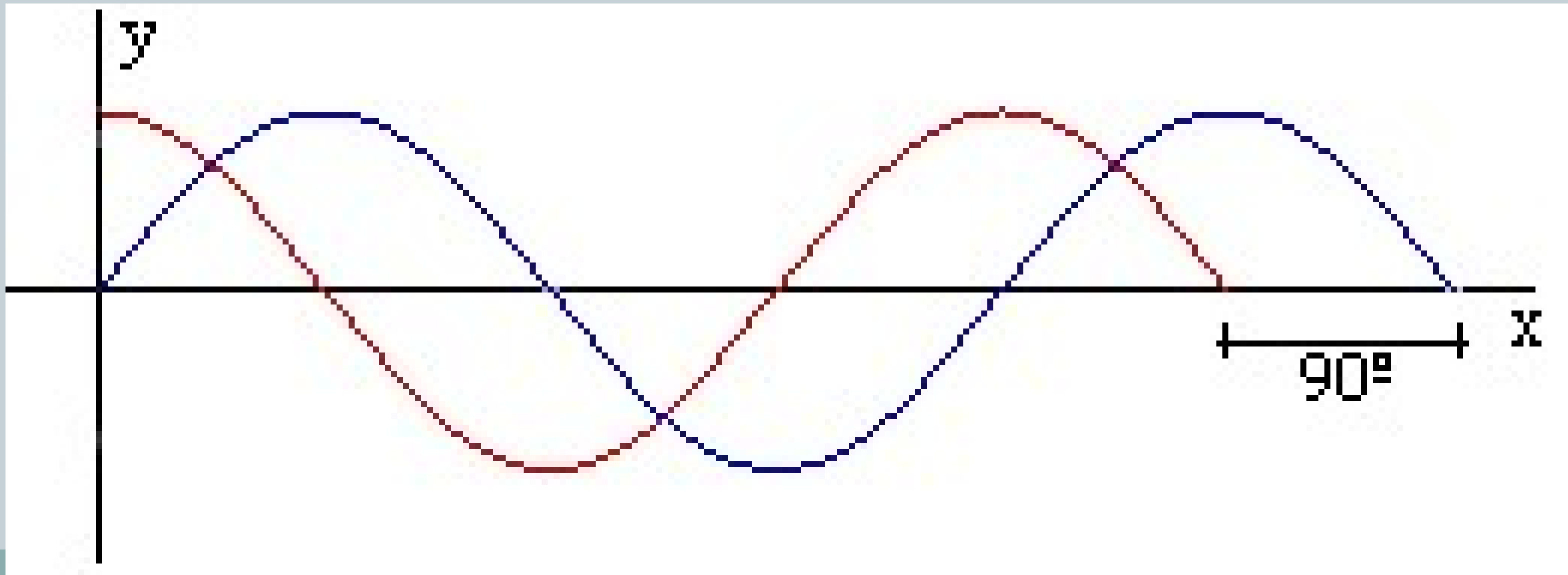
Determinar o valor eficaz da tensão na carga.



Relações de Fase

Uma onda senoidal pode ser entendida como um movimento circular que se propaga ao longo de um eixo, o qual pode representar uma distância ou tempo, por exemplo.

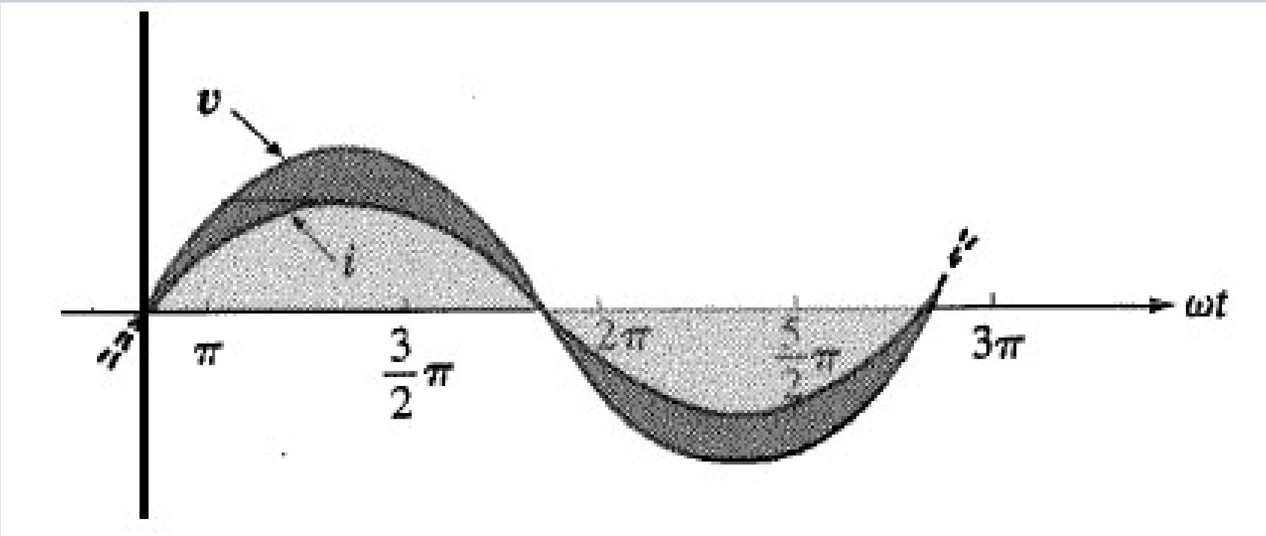
A relação desse movimento com um ponto de referência é chamada de fase.



Relações de Fase

Duas formas de onda pode ou não estar superpostas. Ou seja seus picos podem ou não coincidir.

PICOS COICIDENTES: ONDAS EM FASE

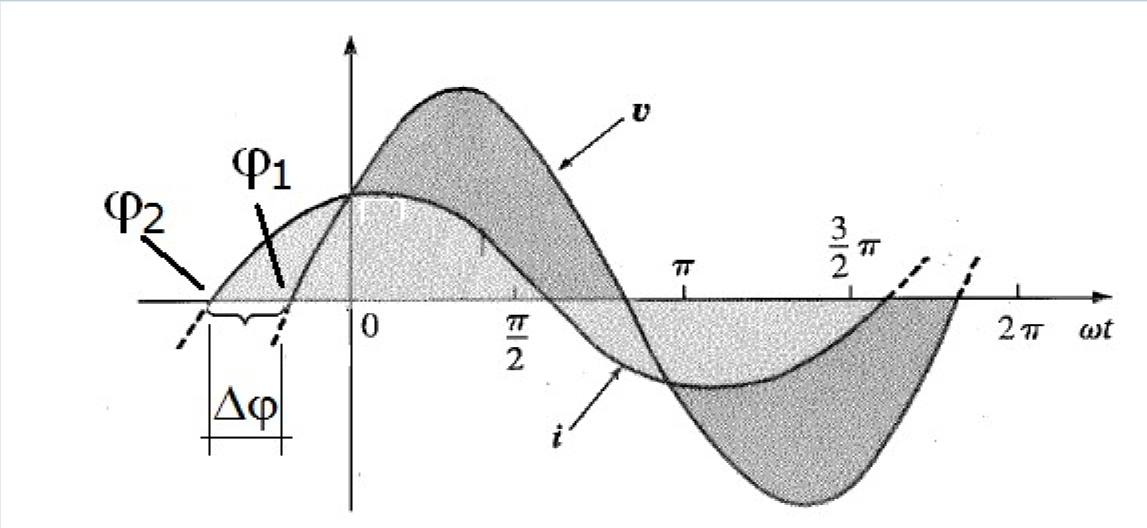


Circuitos puramente resistivos alimentados por tensão alternada.

Relações de Fase

PICOS NÃO COICIDENTES: ONDAS FORA DE FASE

NESSE CASO DIZ-SE QUE AS ONDAS ESTÃO DEFASADAS

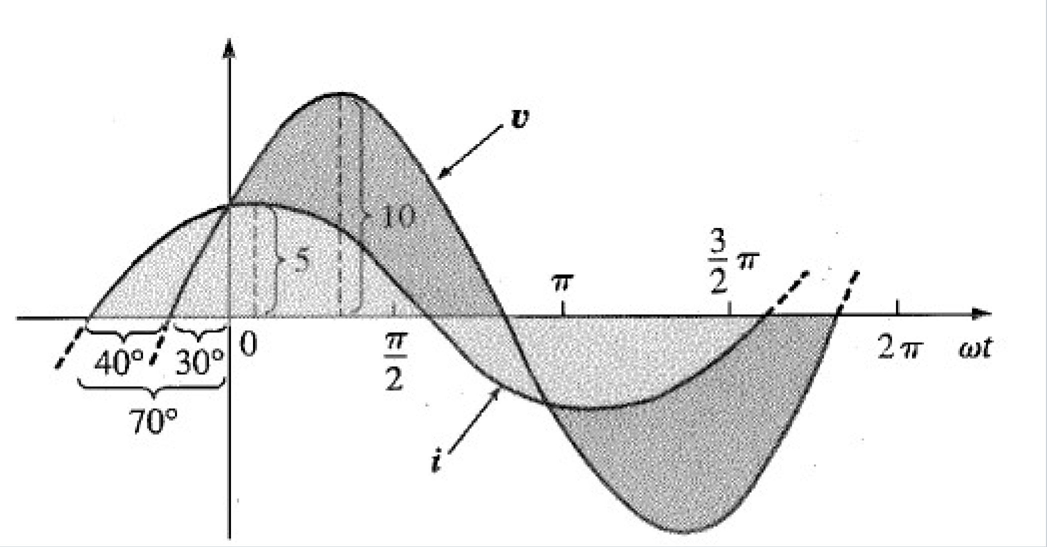


$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Circuitos RL, RC e RLC alimentados por tensão alternada.

EXEMPLOS

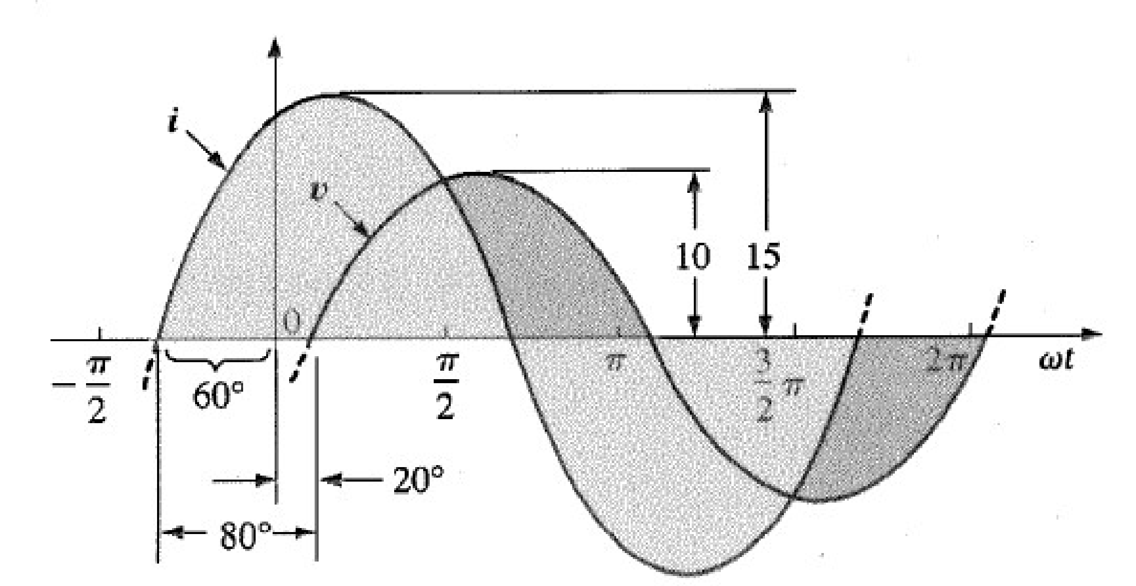
$$v = 10\ \text{sen}(\omega t + 30°)$$
$$i = 5\ \text{sen}(\omega t + 70°)$$



A corrente está adiantada 40° com relação a tensão ou a tensão está atrasada 40° com relação a corrente

EXEMPLOS

$$i = 15\,\text{sen}(\omega t + 60°)$$
$$v = 10\,\text{sen}(\omega t - 20°)$$

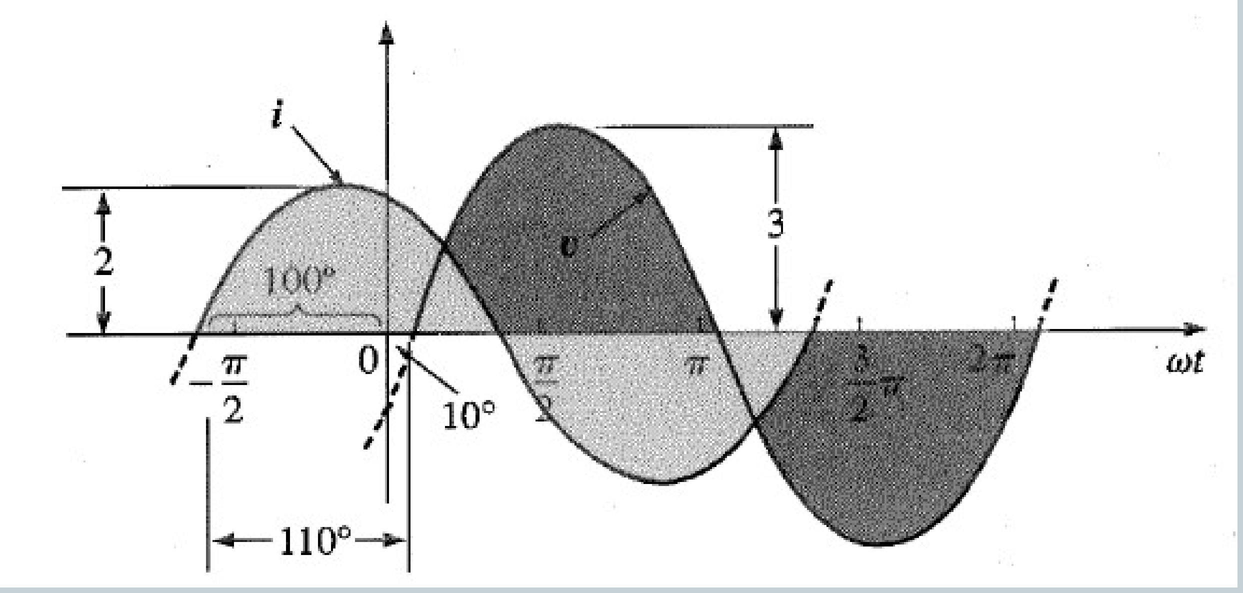


A corrente está adiantada 80° com relação a tensão ou a tensão está atrasada 80° com relação a corrente

EXEMPLOS

$$i = 2\cos(\omega t + 10°)$$
$$v = 3\,\text{sen}(\omega t - 10°)$$

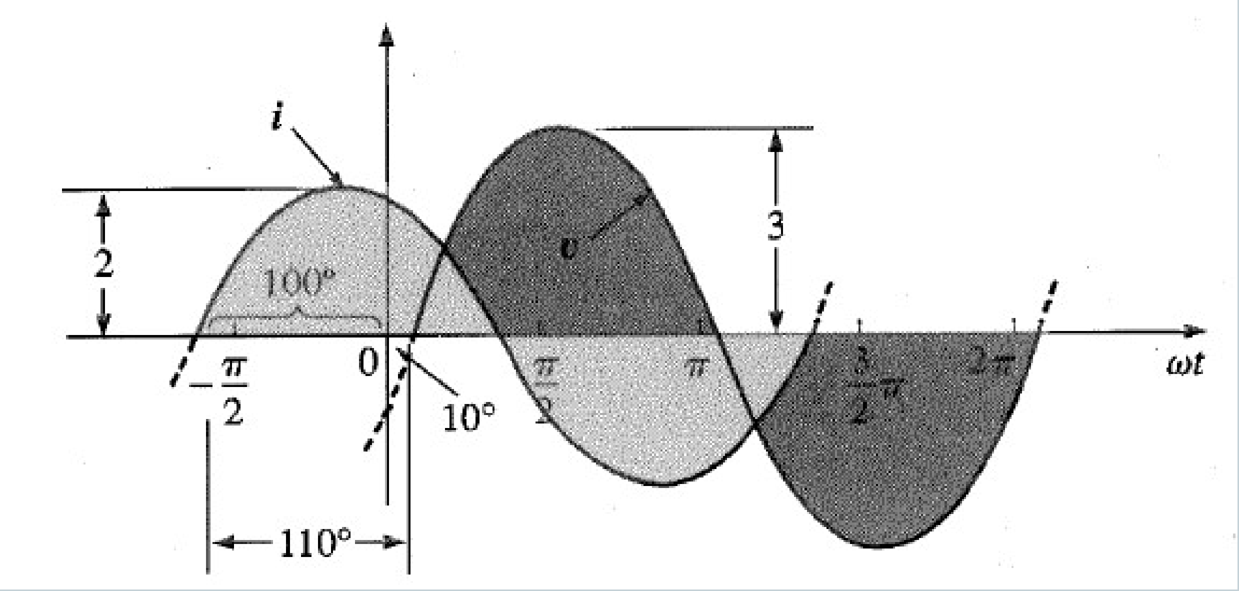
$$i = 2\cos(\omega t + 10°) = 2\,\text{sen}(\omega t + 10° + 90°)$$
$$= 2\,\text{sen}(\omega t + 100°)$$



A corrente está adiantada 110° com relação a tensão ou a tensão está atrasada 110° com relação a corrente

EXEMPLOS

$$i = 2\cos(\omega t + 10°) = 2\,\text{sen}(\omega t + 10° + 90°)$$
$$= 2\,\text{sen}(\omega t + 100°)$$

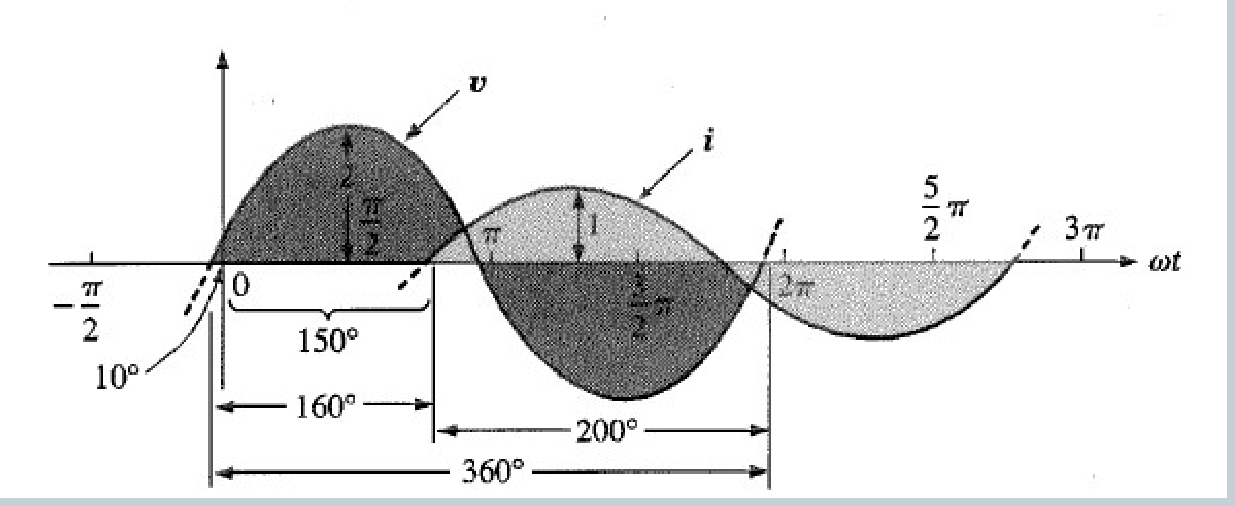


A corrente está adiantada 110° com relação a tensão ou a tensão está atrasada 110° com relação a corrente

EXEMPLOS

$$i = -\text{sen}(\omega t + 30°)$$
$$v = 2\ \text{sen}(\omega t + 10°)$$

$$-\text{sen}(\omega t + 30°) = \text{sen}(\omega t + 30° - \overset{\text{Note}}{180°})$$
$$= \text{sen}(\omega t - 150°)$$



A corrente está atrasada 160° com relação a tensão ou a tensão está adiantada 160° com relação a corrente

Exercícios

29. Calcule a diferença de fase entre as formas de onda de cada par a seguir:

a. $v = 4\ \text{sen}(\omega t + 50°)$
$i = 6\ \text{sen}(\omega t + 40°)$

b. $v = 25\ \text{sen}(\omega t - 80°)$
$i = 5 \times 10^{-3}\ \text{sen}(\omega t - 10°)$

c. $v = 0{,}2\ \text{sen}(\omega t - 60°)$
$i = 0{,}1\ \text{sen}(\omega t + 20°)$

d. $v = 200\ \text{sen}(\omega t - 210°)$
$i = 25\ \text{sen}(\omega t - 60°)$

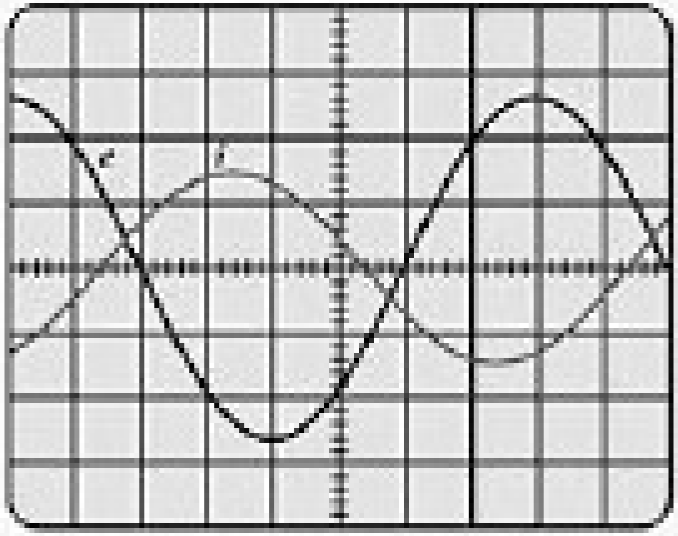
Para a tela de um osciloscópio ilustrada na Figura 13.91, determine:

a. Os períodos das duas ondas.

b. As freqüências das duas ondas.

c. Os valores eficazes das duas ondas.

d. A diferença de fase entre as duas ondas.

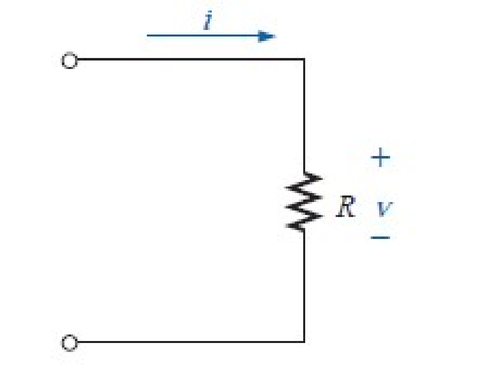


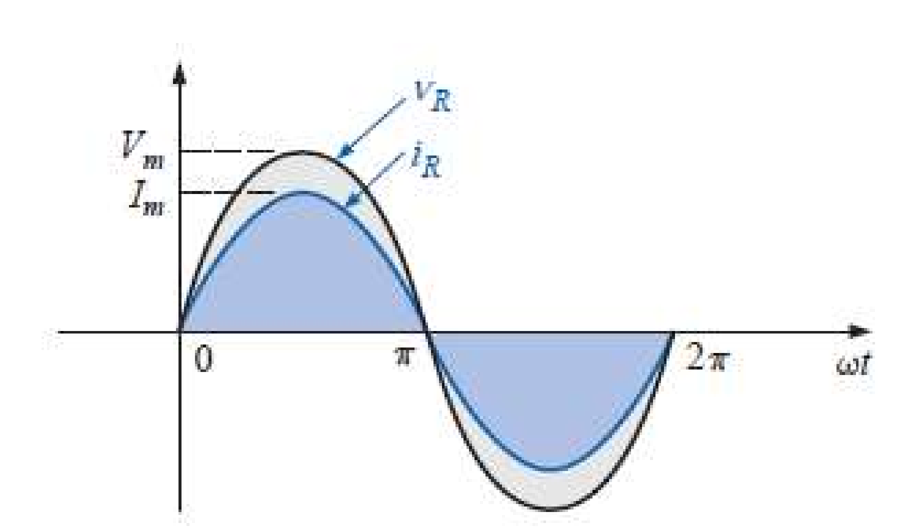
Sensibilidade vertical = 0,5V/div.
Sensibilidade horizontal = 1 ms/div.

Resistência em CA

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \sin \omega t}{R} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{R}}$$

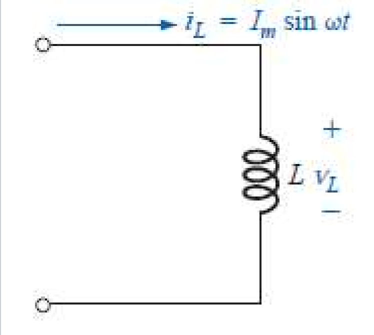




Tensão em fase com a corrente

Indutância em CA

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

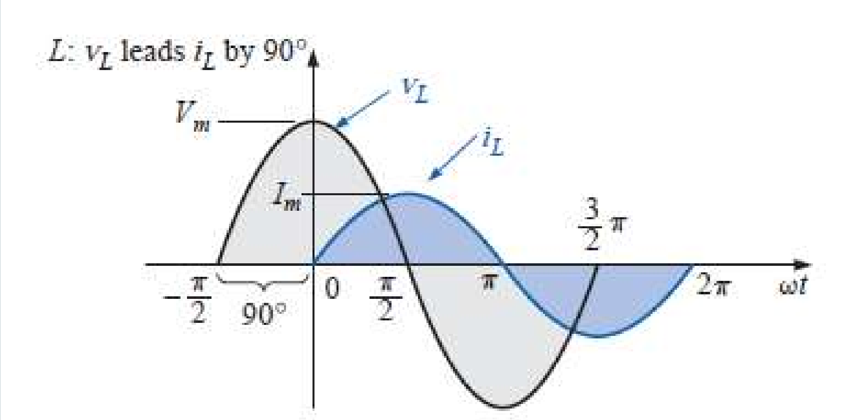


$$\frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t) = \omega I_m \cos \omega t$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L(\omega I_m \cos \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

$$v_L = V_m \sin(\omega t + 90°)$$

$$V_m = \omega L I_m$$



$$\boxed{X_L = \omega L}$$

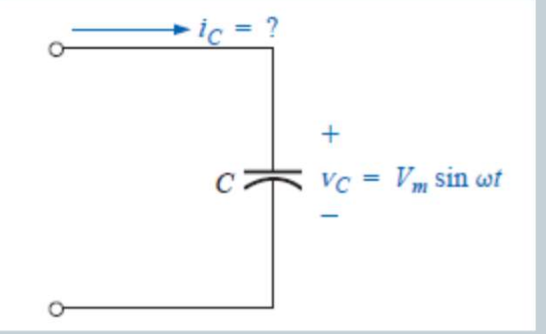
$$\boxed{X_L = \frac{V_m}{I_m}}$$

Tensão adiantada 90° em relação a corrente

Capacitância em CA

$$i_C = C\,\frac{dv_C}{dt}$$

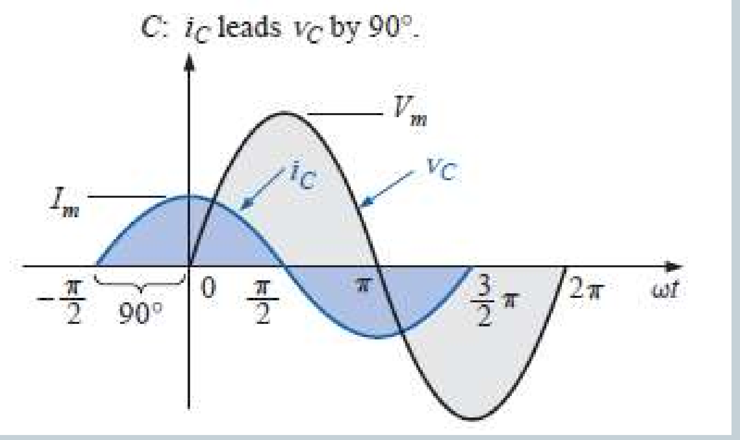
$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt}(V_m \sin \omega t) = \omega V_m \cos \omega t$$



$$i_C = C\,\frac{dv_C}{dt} = C(\omega V_m \cos \omega t) = \omega C V_m \cos \omega t$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 90°)$$

$$I_m = \omega C V_m$$



$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$$

$$\boxed{X_C = \frac{V_m}{I_m}}$$

Tensão atrasada 90° em relação a corrente

A Lei de Ohm em CA

Tensão no Elemento para corrente senoidal			
Elemento	**Corrente Genérica**	$i(t)=I_M sen(\omega t)$	$i(t)=I_M cos(\omega t)$
R	$v_R(t)=R\cdot i(t)$	$v_R(t)=R\cdot I_M sen(\omega t)$	$v_R(t)=R\cdot I_M cos(\omega t)$
L	$v_L(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}$	$v_L(t)=\omega L\cdot I_M cos(\omega t)$	$v_L(t)=\omega L\cdot I_M[-sen(\omega t)]$
C	$v_C(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)dt$	$v_C(t)=\frac{I_M}{\omega C}[-cos(\omega t)]$	$v_C(t)=\frac{I_M}{\omega C}sen(\omega t)$

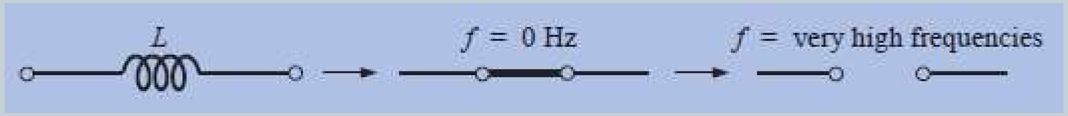
Tensão no Elemento para tensão senoidal			
Elemento	**Tensão Genérica**	$v(t)=V_M sen(\omega t)$	$v(t)=V_M cos(\omega t)$
R	$i_R(t)=\frac{v(t)}{R}$	$i_R(t)=\frac{V_M}{R}sen(\omega t)$	$i_R(t)=\frac{V_M}{R}cos(\omega t)$
L	$i_L(t)=\frac{1}{L}\cdot\int v(t)dt$	$i_L(t)=\frac{V_M}{\omega L}[-cos(\omega t)]$	$i_L(t)=\frac{V_M}{\omega L}sen(\omega t)$
C	$i_C(t)=C\cdot\frac{dv(t)}{dt}$	$i_C(t)=\omega C\cdot V_M cos(\omega t)$	$i_C(t)=\omega C\cdot V_M[-sen(\omega t)]$

EFEITO DA FREQUÊNCIA SOBRE L E C

$\boxed{X_L = 0\ \Omega}$ dc, $f = 0$ Hz

$\boxed{X_L \Rightarrow \infty\ \Omega \quad \text{as } f \Rightarrow \infty \text{ Hz}}$

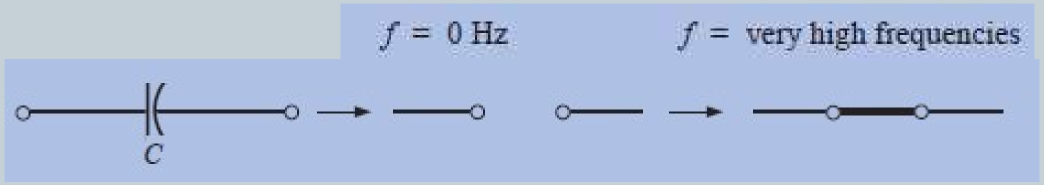
$$\boxed{X_L = \omega L}$$



$\boxed{X_C \Rightarrow \infty\ \Omega \quad \text{as } f \Rightarrow 0 \text{ Hz}}$

$\boxed{X_C \cong 0\ \Omega}$ f = very high frequencies

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$$



Exercícios

Considerando a tensão no resistor como indicado nos itens (a) e (b), calcule as expressões para a corrente, sendo o resistor de 10 Ω. Esboce os gráficos de v e i.

a. $v = 100 \text{ sen } 377t$

b. $v = 25 \text{ sen}(377t + 60°)$

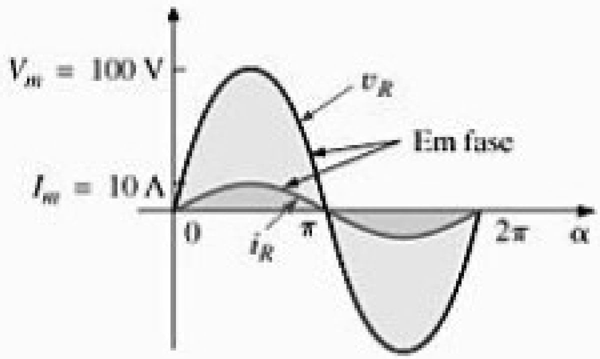
Solução:

a. Pela Equação (14.2): $I_m = \dfrac{V_m}{R} = \dfrac{100 \text{ V}}{10\ \Omega} = 10 \text{ A}$

(v e i estão em fase), então:

$$\boldsymbol{i = 10 \text{ sen } 377t}$$

As curvas de v e i são mostradas na Figura 14.13.



A corrente em um indutor de 0,1 H é dada nos itens *a* e *b* a seguir. Determine em cada caso a expressão para a tensão no indutor. Esboce as curvas de v e i.

a. $i = 10 \text{ sen } 377t$

b. $i = 7 \text{ sen}(377t - 70°)$

Solução:

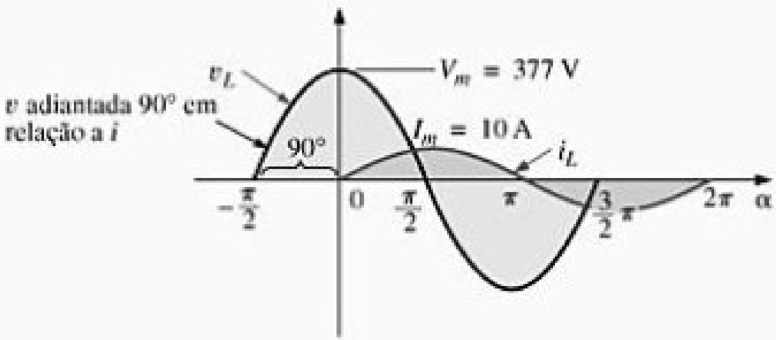
a. Pela Equação (14.4): $X_L = \omega L = (377 \text{ rad/s})(0{,}1 \text{ H})$
$= 37{,}7\ \Omega$

Pela Equação (14.5): $V_m = I_m X_L = (10 \text{ A})(37{,}7\ \Omega)$
$= 377 \text{ V}$

Sabemos que, no caso de um indutor, v está adiantada 90º em relação a i. Portanto:

$$v = \mathbf{377 \text{ sen}(377}t \mathbf{ + 90°)}$$

As curvas de v e i são mostradas na Figura 14.15.



Dados os pares de expressões para tensões e correntes a seguir, determine se o dispositivo envolvido é um capacitor, um indutor ou um resistor e calcule os valores de C, L e R se houver dados suficientes para isso (veja a Figura 14.18):

a. $v = 100 \operatorname{sen}(\omega t + 40°)$
   $i = 20 \operatorname{sen}(\omega t + 40°)$
b. $v = 1.000 \operatorname{sen}(377t + 10°)$
   $i = 5 \operatorname{sen}(377t - 80°)$
c. $v = 500 \operatorname{sen}(157t + 30°)$
   $i = 1 \operatorname{sen}(157t + 120°)$
d. $v = 50 \cos(\omega t + 20°)$
   $i = 5 \operatorname{sen}(\omega t + 110°)$

Números Complexos

CONCEITO, FORMAS ALGÉBRICA E TRIGONOMÉTRICA E OPERAÇÕES.

OS NÚMEROS COMPLEXOS SURGIRAM PARA SANAR UMA DAS MAIORES DÚVIDAS QUE ATORMENTAVAM OS MATEMÁTICOS: QUAL O RESULTADO DA OPERAÇÃO

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \sqrt{-1}$$

Conceito

- Por isso, foi criado um número especial, que denominamos algebricamente como i, que elevado ao quadrado resulte em -1, matematicamente:

$$I^2 = -1$$

$$\therefore\ i = \sqrt{-1}$$

Esse novo conceito possibilitou a resolução da equação mostrada anteriormente.

Conceito

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \sqrt{-1}$$

Assim, foi criado um novo conjunto numérico denominado conjunto dos números complexos ou conjunto dos números imaginários, que representamos pela letra C.

- Desse modo, com $\therefore i = \sqrt{-1}$:

$$x = i$$

Exemplos

$\sqrt{-2} = \sqrt{2(-1)}$

Aplicando a relação fundamental:

$\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)}$

Aplicando a relação fundamental
:

$\sqrt{-4} = 2i$

Forma algébrica

O número complexo possui uma parte real e outra imaginária. Como a parte imaginária conta com a presença do i, sua forma algébrica é

$$a + bi$$

Parte real

Parte imaginária

Conjugado de um número complexo

Um número complexo $z = a + bi$ possui um conjugado z^*.

que é representado por $$z^* = a - bi$$

(lê-se conjugado de z)

Exemplos

Dados os números complexos, encontrar seus respectivos conjugados:

$$z=3+2i \rightarrow z^*=3-2i$$

$$z=-3+4i \rightarrow z^*=-3-4i$$

$$z=5-2i \rightarrow z^*=5+2i$$

$$z=-3+2i \rightarrow z^*=-3-2i$$

Adição e subtração com números complexos na forma algébrica

Para somar e subtrair números complexos deve-se efetuar as operações na parte real e imaginária separadamente.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplos

$(2 + 4i) + (3 + i) = (2 + 3) + (4 + 1)i = 5 + 5i$

$(1 + 4i) - (2 - 7i) = (1 - 2) + (4 + 7)i = -1 + 11i$

$(3 + i) - (4 + i) = (3 - 4) + (i - i) = -1$

$i + (2 + 4i) = 2 + (1 + 4)i = 2 + 5i$

Multiplicação com números complexos na forma algébrica

Para efetuar a multiplicação aplica-se simplesmente a distributiva:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \therefore$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd \therefore$$

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + b(-d + ci)$$

Exemplos

$(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i – 3 = -1 + 5i$

$2\ (1 + i) = 2 + 2i$

$(2 - i)(-3 + 2i) = -6 +4i +3i – 2i^2 = -4 + 7i$

Divisão com números complexos na forma algébrica

Para se dividir números complexos, deve-se multiplicar ambos os números pelo conjugado do complexo do denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . z_2^*}{z_2 . z_2^*}$$

Exemplo

$$\frac{3+2i}{1+i}=\frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$\frac{3+2i}{1+i}=\frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2}$$

$$\frac{3+2i}{1+i}=\frac{5-i}{1+1}=\frac{5-i}{2}$$

$$\frac{3+2i}{1+i}=\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$$

Potências de um número complexo

Nas potências de i notam-se regularidades de quatro em quatro no expoente:

$$i^0 = 1 \qquad i^4 = 1$$

$$i^1 = i \qquad i^5 = i$$

$$i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$$

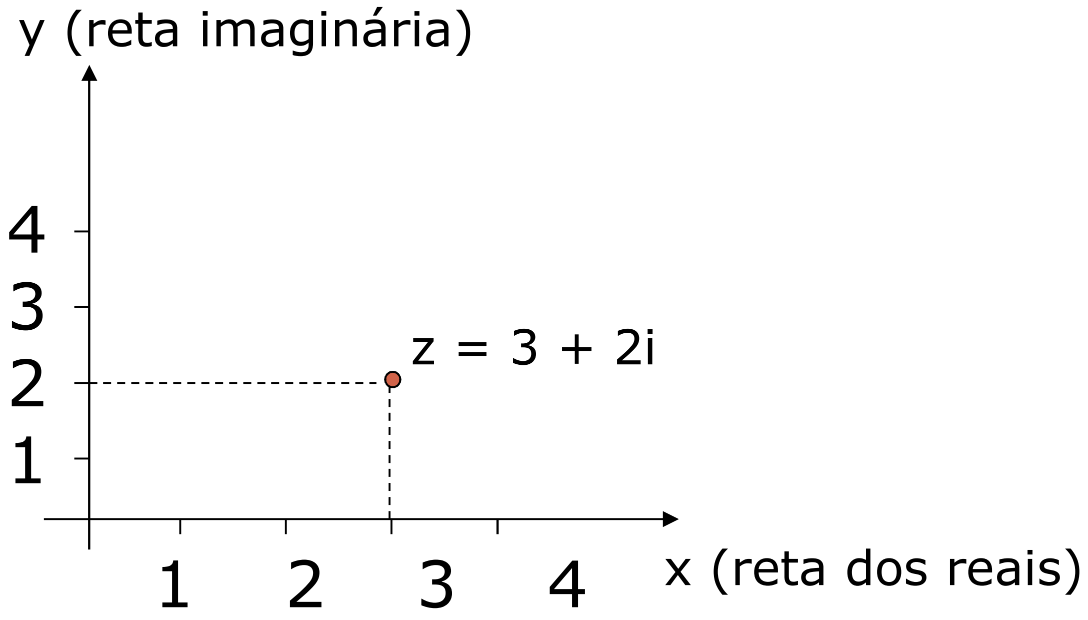
$$i^3 = -i \qquad i^7 = -i$$

Número complexo no plano de Argand-Gauss

Os números complexos podem ser representados num plano, onde a reta das abscissas é a reta dos números reais e a das ordenadas é a reta dos números complexos. Esse plano é denominado plano de Argand-Gauss.

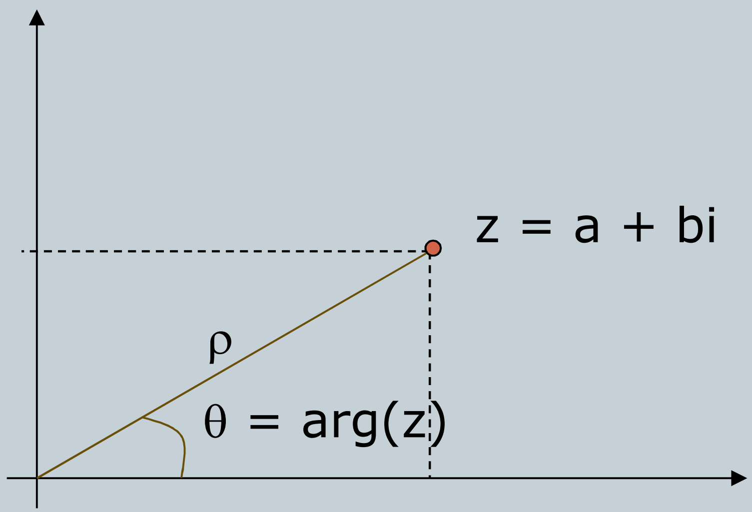
Exemplo

Colocar no plano de Argand-Gauss o número complexo $z = 3 + 2i$

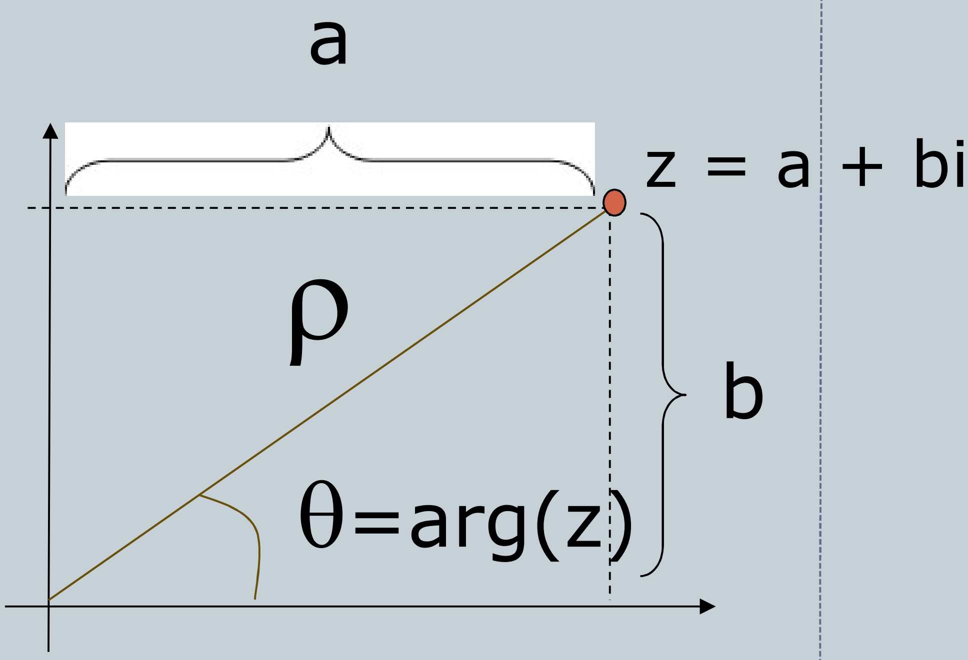


Módulo e argumento de um número complexo

No gráfico, o módulo de um número complexo z = a + bi é o segmento de reta que vai do ponto origem O(0,0) até o ponto do P(a, b) do número complexo z. O argumento de z é o ângulo que esta forma com o eixo das abscissas em sentido anti-horário.



Módulo e argumento de um número complexo



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Forma trigonométrica

Utilizando as relações dadas no slide anterior e aplicando-as à forma algébrica, obtemos a forma trigonométrica de um número complexo.

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \therefore b = \rho\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \therefore a = \rho\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad z = a + bi$$

$$z = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta i$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Exemplo

Passar para a forma trigonométrica o número complexo z = 1 + i√3

$$\rho = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

IDENTIDADE DE EULER E NÚMEROS COMPLEXOS

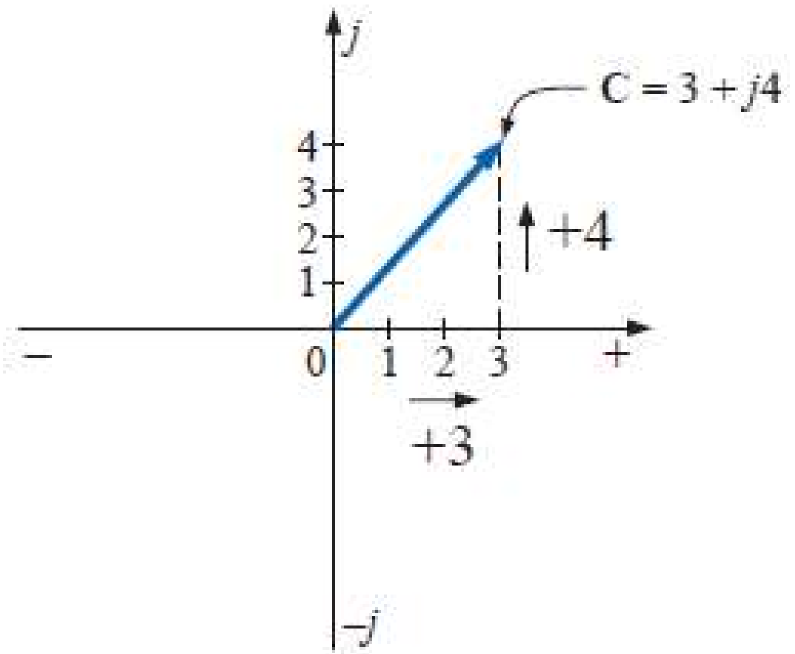
FORMA POLAR

FORMA RETANGULAR

$$\underbrace{Vsen(\omega t + \varphi)}_{\text{DOMÍNIO DO TEMPO}} \rightarrow \underbrace{\dot{V} < \varphi = \dot{V}e^{j\omega t} = \dot{V}cos(\varphi) + \dot{V}jsen(\varphi)}_{\text{DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA}}$$

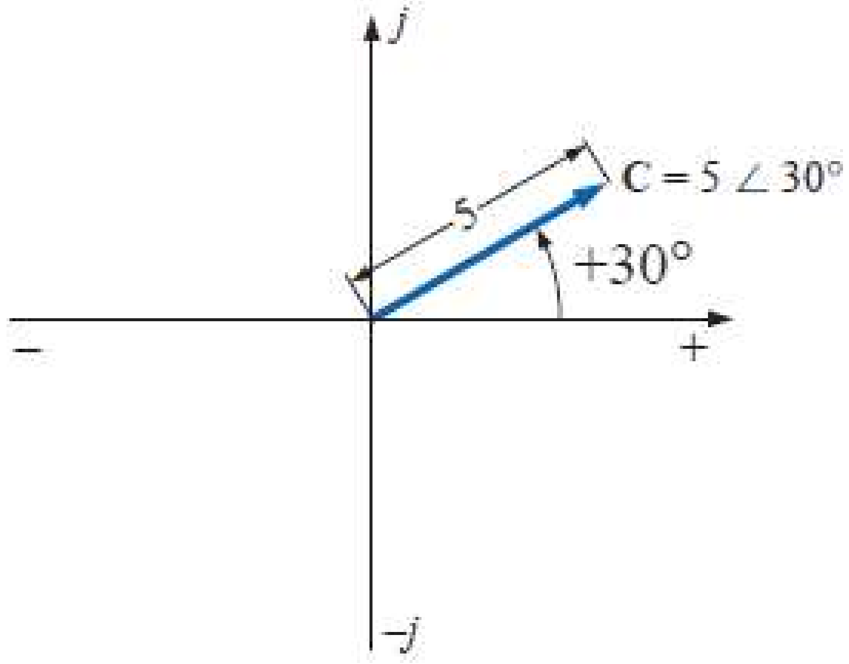
EXEMPLOS

$$\mathbf{C} = 3 + j4$$

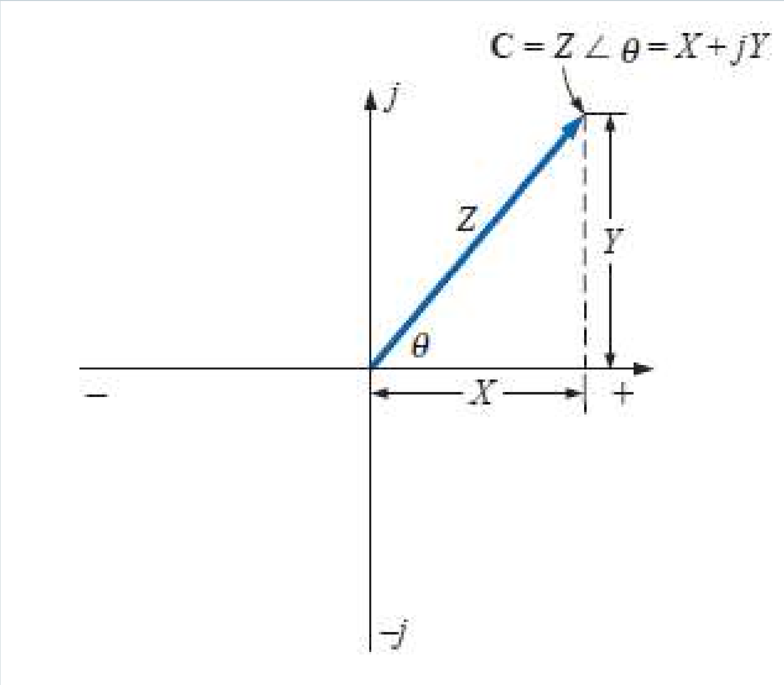


EXEMPLOS

$$\mathbf{C} = 5 \angle 30^\circ$$



CONVERSÃO
POLAR ↔ RETANGULAR



$$\dot{Z} = Z < \theta = X + iY$$

$$\boxed{Z = \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X}}$$

$$\boxed{X = Z \cos \theta}$$

$$\boxed{Y = Z \sin \theta}$$

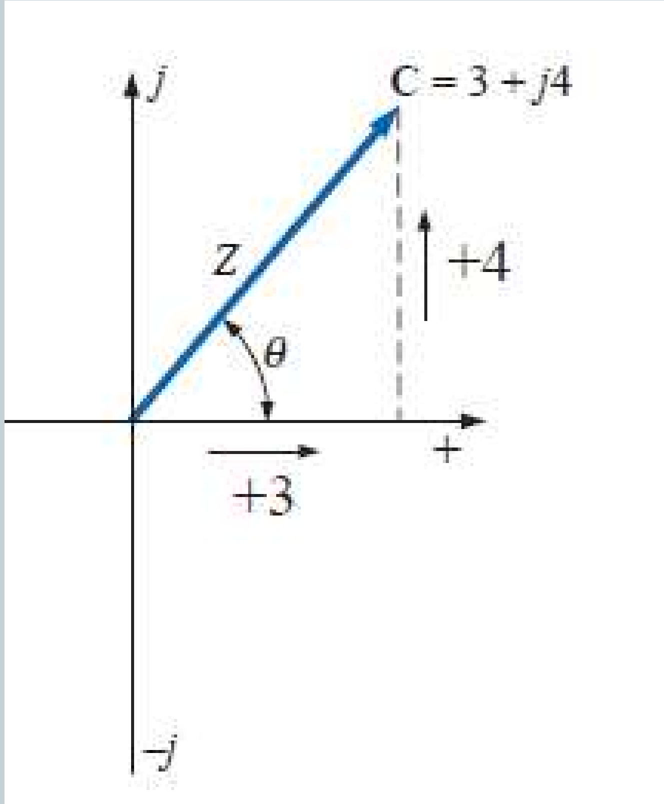
EXEMPLOS: RETANGULAR →POLAR

$$\mathbf{C} = 3 + j\,4$$

$$Z = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{5} \angle \mathbf{53.13^\circ}$$



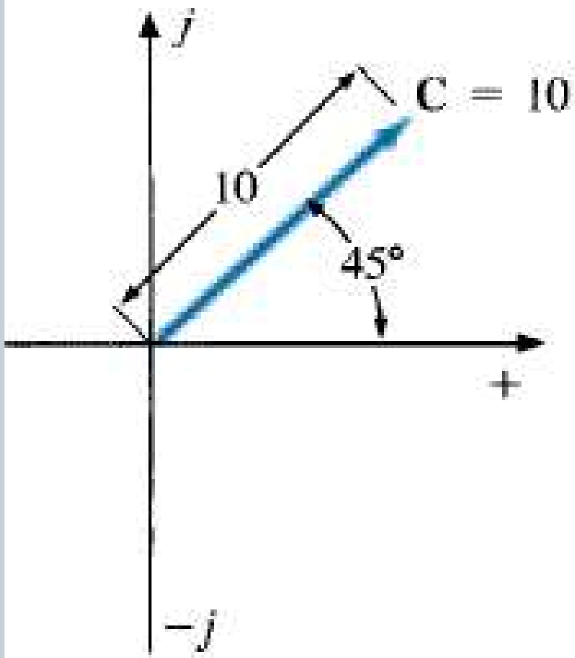
EXEMPLOS: POLAR→RETANGULAR

$$\mathbf{C} = 10 \angle 45°$$

$$X = 10 \cos 45° = (10)(0.707) = 7.07$$

$$Y = 10 \sin 45° = (10)(0.707) = 7.07$$

$$\mathbf{C} = 7.07 + j7.07$$



Exercícios

Represente os números complexos a seguir no plano complexo:

a. $\mathbf{C} = 5 \angle 30°$
b. $\mathbf{C} = 7 \angle -120°$
c. $\mathbf{C} = -4{,}2 \angle 60°$

Represente os seguintes números no plano complexo:

a. $\mathbf{C} = 3 + j4$
b. $\mathbf{C} = 0 - j6$
c. $\mathbf{C} = -10 - j20$

a. Adicione $\mathbf{C}_1 = 2 + j4$ e $\mathbf{C}_2 = 3 + j1$.
b. Adicione $\mathbf{C}_1 = 3 + j6$ e $\mathbf{C}_2 = -6 + j3$.

a. Subtraia $\mathbf{C}_2 = 1 + j4$ de $\mathbf{C}_1 = 4 + j6$.
b. Subtraia $\mathbf{C}_2 = -2 + j5$ de $\mathbf{C}_1 = +3 + j3$.

a. Calcule $\mathbf{C}_1 \bullet \mathbf{C}_2$ para:

$$\mathbf{C}_1 = 5 \angle 20° \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_2 = 10 \angle 30°$$

b. Calcule $\mathbf{C}_1 \bullet \mathbf{C}_2$ para:

$$\mathbf{C}_1 = 2 \angle -40° \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_2 = 7 \angle +120°$$

a. Calcule $\mathbf{C}_1 \bullet \mathbf{C}_2$ se

$$\mathbf{C}_1 = 2 + j3 \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_2 = 5 + j10$$

b. Calcule $\mathbf{C}_1 \bullet \mathbf{C}_2$ se

$$\mathbf{C}_1 = -2 - j3 \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_2 = +4 - j6$$

Exercícios

a. Calcule $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ para $\mathbf{C}_1 = 1 + j4$ e $\mathbf{C}_2 = 4 + j5$.
b. Calcule $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ para $\mathbf{C}_1 = -4 - j8$ e $\mathbf{C}_2 = +6 - j1$.

a. Calcule $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ para $\mathbf{C}_1 = 15 \angle 10°$ e $\mathbf{C}_2 = 2 \angle 7°$.
b. Calcule $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ para $\mathbf{C}_1 = 8 \angle 120°$ e $\mathbf{C}_2 = 16 \angle -50°$.

RECOMENDAÇÕES

RESOLVER OS EXERCÍCIOS DOS CAPÍTULOS 13 E 14 DO LIVRO DO BOYLESTAD

VAMOS A LUTA FILHOS DA PÁTRIA!

CIRCUITOS ELÉTRICOS II

4ª Termo

Engenharias:

Elétrica
Mecânica
Computação

PROF. DR. GIULIANO PIERRE ESTEVAM

IDENTIDADE DE EULER

A PARTIR DAS DEFINIÇÕES:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \ldots\ldots$$

$$\mathrm{sen}\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} + \ldots\ldots$$

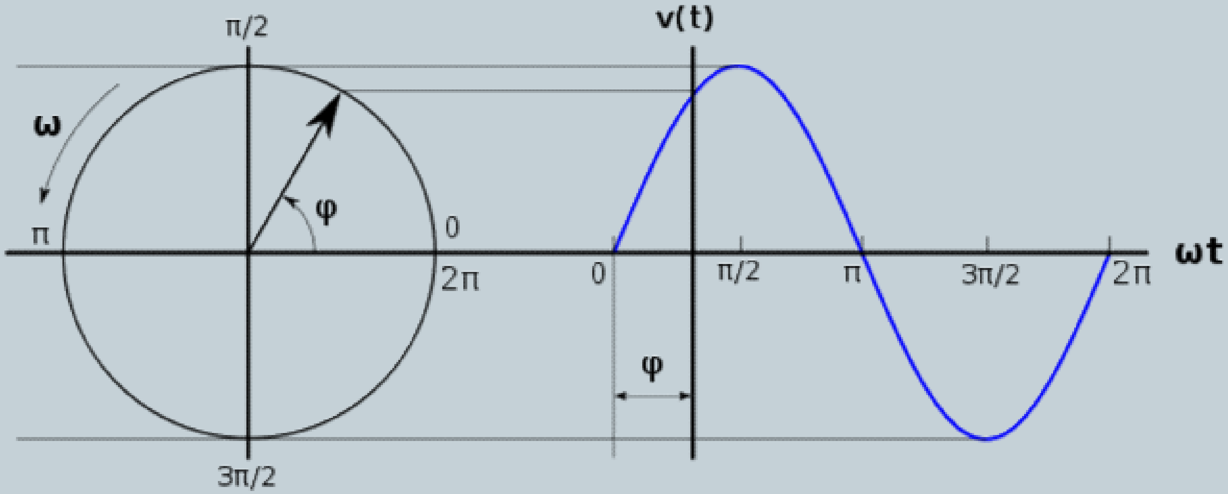
$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{i\varphi^7}{7!} \ldots\ldots$$

Pode-se chegar na seguinte identidade

$$\boxed{e^{i\varphi} = cos\varphi + isen\varphi}$$

FASORES

SEGMENTO DE RETA ORIENTADO QUE GIRA NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO A UMA VELOCIDADE CONSTANTE ω (rad/s).



$$V_M sen(\omega t + \varphi)$$

DOÍMINIO DO TEMPO
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A PARTIR DA IDENTIDADE DE EULER, E MUITA VONTADE PODE-SE CHEGAR NA SEGUINTE IDENTIDADE

DOMÍNIO DO TEMPO

DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

$$V_M sen(\omega t + \varphi) \longrightarrow V_M < \varphi$$

$$V_M cos(\omega t + \varphi) = V_M sen(\omega t + \varphi + 90)$$

FASORES COM NÚMEROS COMPLEXOS

FORMA POLAR	$\dot{V} = V < \varphi$
FORMA RETANGULAR	$\dot{V} = V cos\varphi + iV sen\varphi$
FORMA EXPONENCIAL	$\dot{V} = Ve^{i\varphi}$

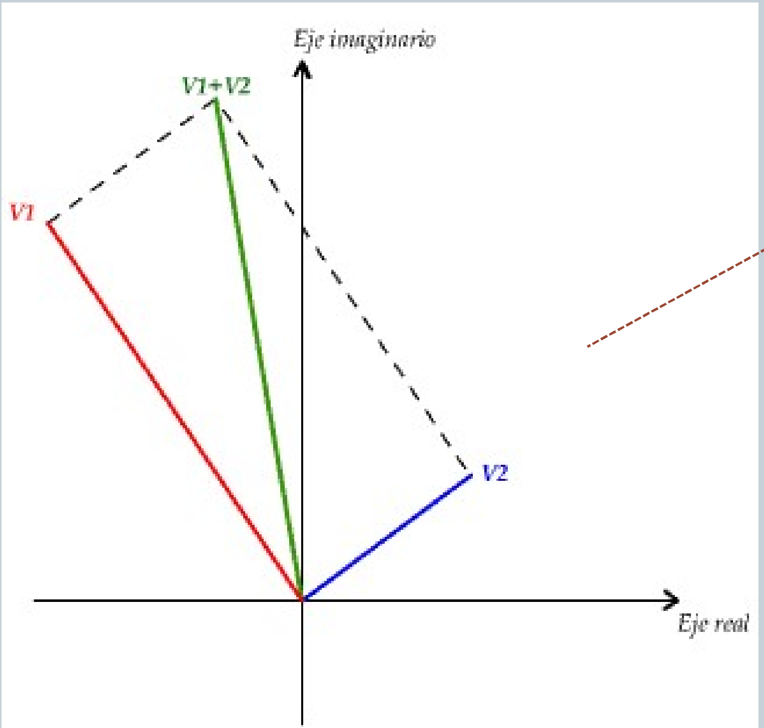
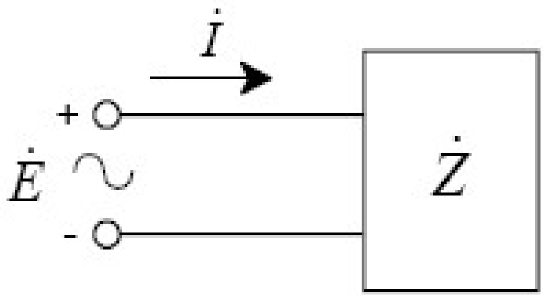


DIAGRAMA FASORIAL

IMPEDÂNCIA

A PARTIR DA IMPEDÂNCIA NÃO SE PODE DETERMINAR COMO ELA FOI OBTIDA

A impedância representa o quanto um elemento "impede" a passagem da corrente no circuito.



$\dot{Z}$: impedância

Unidade: Ω

Módulo: Z

Reescrevendo a Lei de Ohm tem-se: $\dot{E} = \dot{Z} \cdot \dot{I}$ (forma complexa).

Portanto a impedância é definida como: $\dot{Z} = \dfrac{\dot{E}}{\dot{I}}$.

IMPEDÂNCIA

$$\dot{Z} = R \pm jX$$

$+jX_L$ INDUTIVO

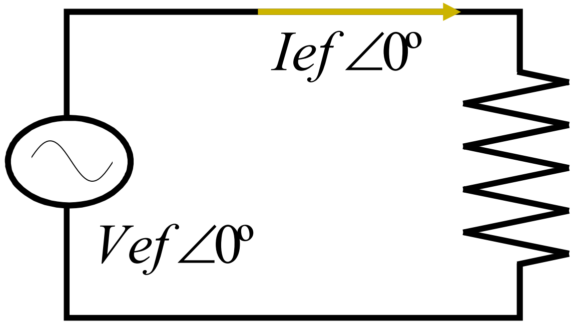
$-jX_C$ CAPACITIVO

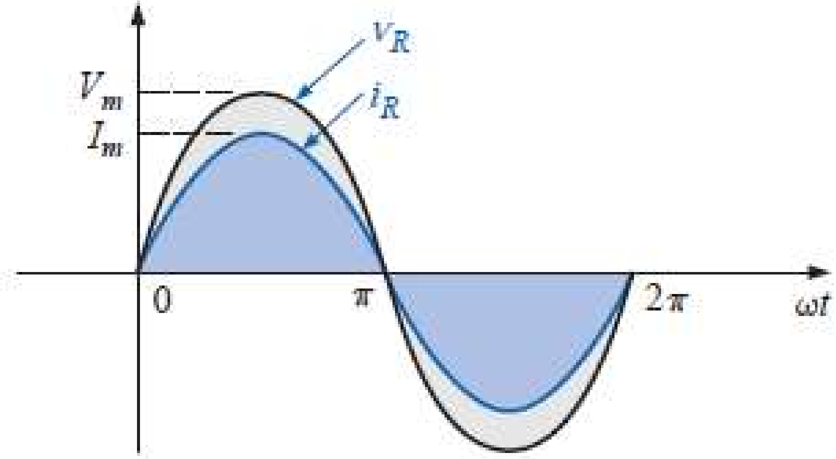
$$\dot{Z} = Z\angle \pm \varphi$$

$+\varphi$ INDUTIVO

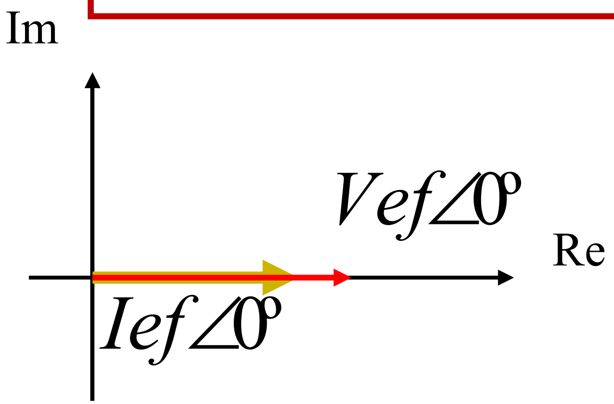
$-\varphi$ CAPACITIVO

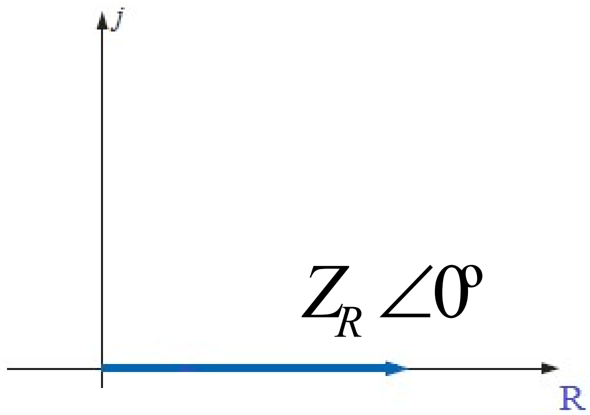
ELEMENTOS DE CIRCUITO: RESISTÊNCIA





$$\dot{Z}_R = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{Vef\angle 0^{o}}{Ief\angle 0^{o}} = Z_R\angle 0^{o}$$

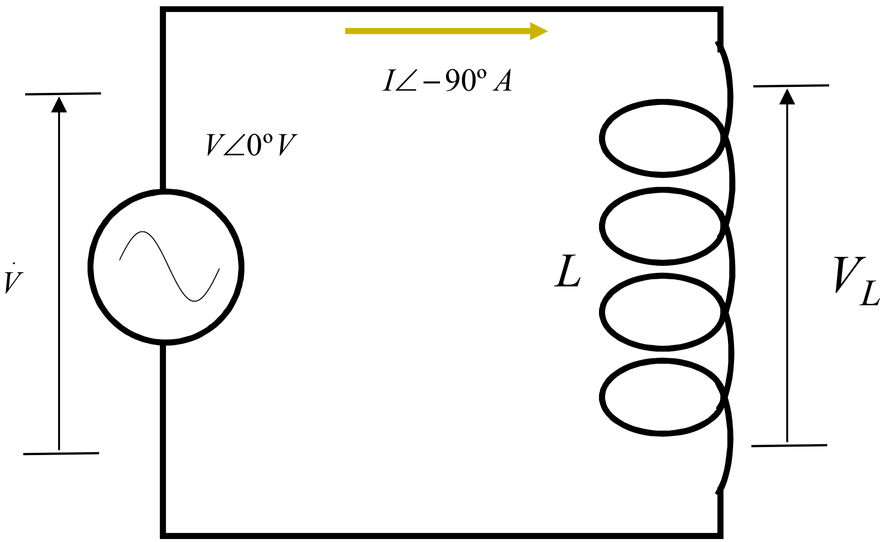




ELEMENTOS DE CIRCUITO: INDUTÂNCIA

$$\boxed{\dot{V} = \dot{I} \cdot \dot{Z}_L}$$

$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}_L} = \frac{V\angle 0^o}{jL\omega} = \frac{V\angle 0^o}{L\omega\angle 90^o} = \frac{V}{L\omega}\angle -90^o\, A}$$



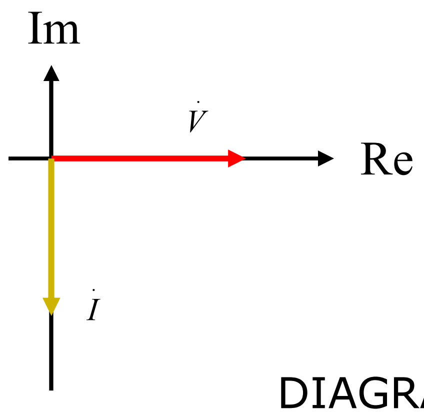
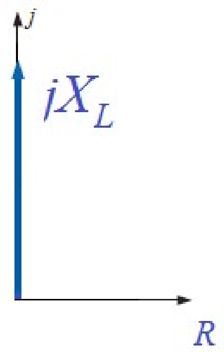


DIAGRAMA FASORIAL

Impedancia complexa: $\dot{Z}_L = \dot{X}_L = jL\omega = L\omega\angle 90^o\,\Omega$

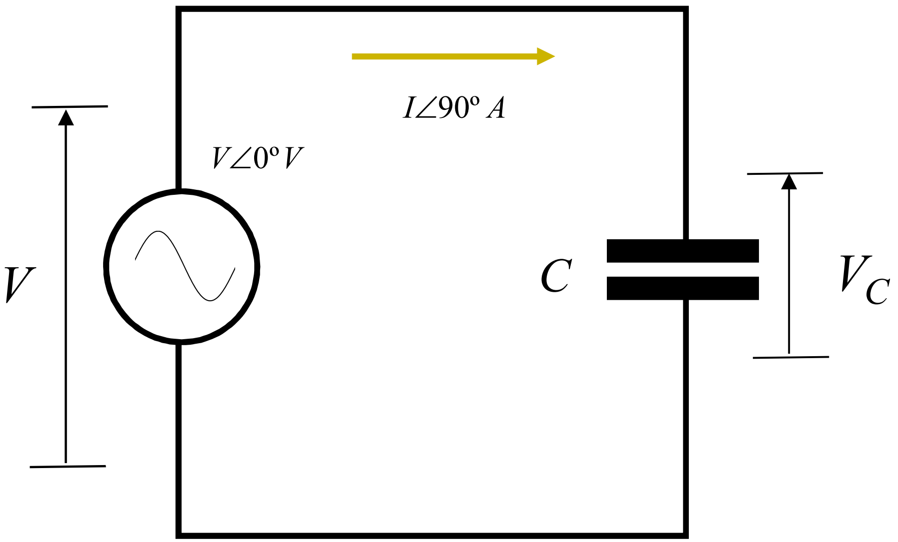
Reatância (indutiva): $X_L = L\omega\ (\Omega)$

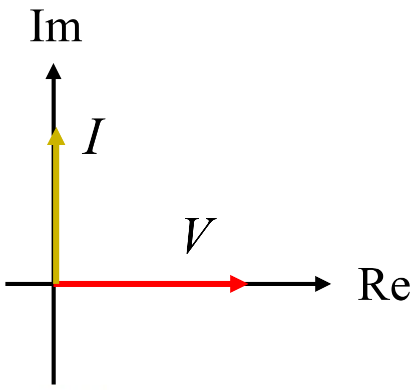


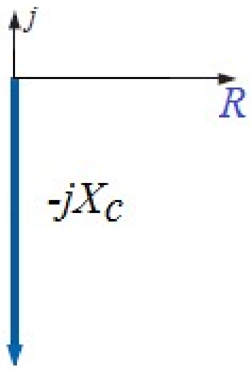
ELEMENTOS DE CIRCUITO: CAPACITOR

$$\boxed{\dot{V} = \dot{I}\cdot \dot{Z}_C}$$

$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}_L} = \frac{V\angle 0^{\circ}}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{V\angle 0^{\circ}}{\dfrac{1}{\omega C}\angle -90^{\circ}} = \frac{V}{\dfrac{1}{\omega C}}\angle 90^{\circ}\ A}$$



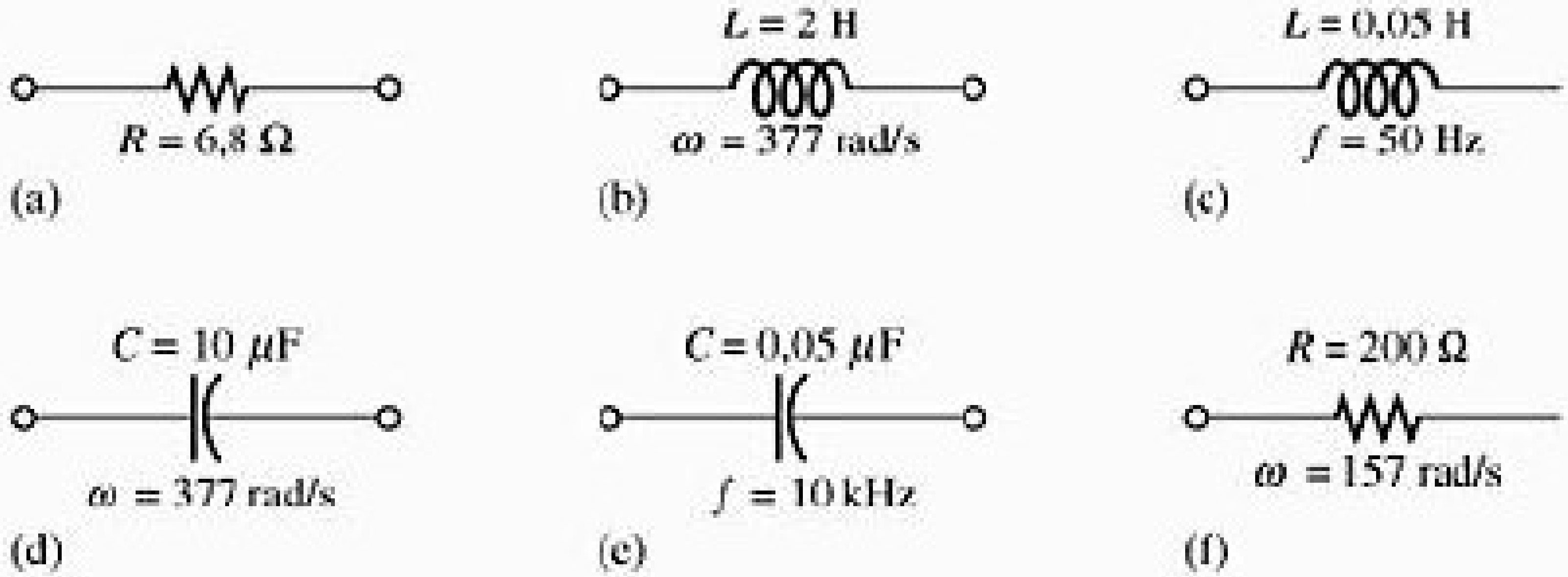




Impedancia complexa: $Z_C = -j\dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{C\omega}\angle -90^{\circ}\,\Omega$

Reactancia (capacitiva): $X_C = \dfrac{1}{C\omega}$

1. Expresse as impedâncias dos componentes vistos na Figura 15.113, tanto na forma polar quanto na retangular.



Usando a álgebra dos números complexos, determine a corrente i no circuito visto na Figura 15.8. Esboce o gráfico de v e i.

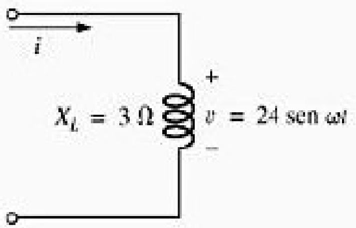


Figura 15.8 Exemplo 15.3.

Solução:

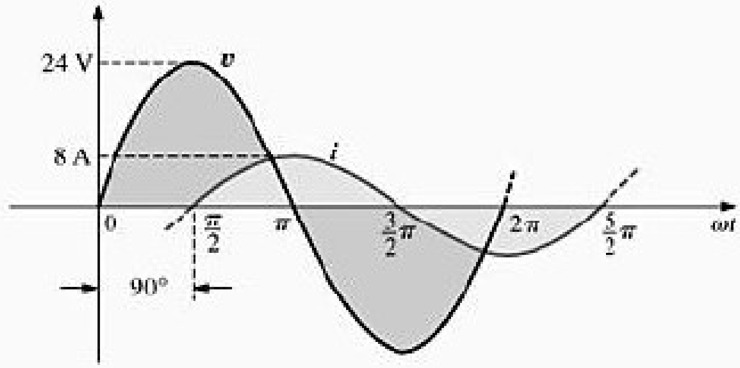
Observe a Figura 15.9:

$v = 24$ sen $\omega t \Rightarrow$ forma fasorial $\mathbf{V} = 16{,}968\text{ V} \angle 0°$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_L} = \frac{V \angle \theta}{X_L \angle 90°} = \frac{16{,}968\text{ V} \angle 0°}{3\,\Omega \angle 90°}$$

$$= 5{,}656\text{ A} \angle -90°$$

e $\quad i = \sqrt{2}(5{,}656)$ sen$(\omega t - 90°) = \mathbf{8{,}0\ sen(\omega t - 90°)}$



Usando a álgebra dos números complexos, determine a tensão v no circuito visto na Figura 15.16. Esboce as curvas de v e i.

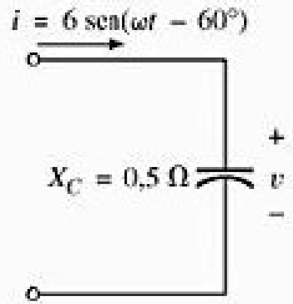


Figura 15.16 Exemplo 15.6.

Solução:

Veja a Figura 15.17:

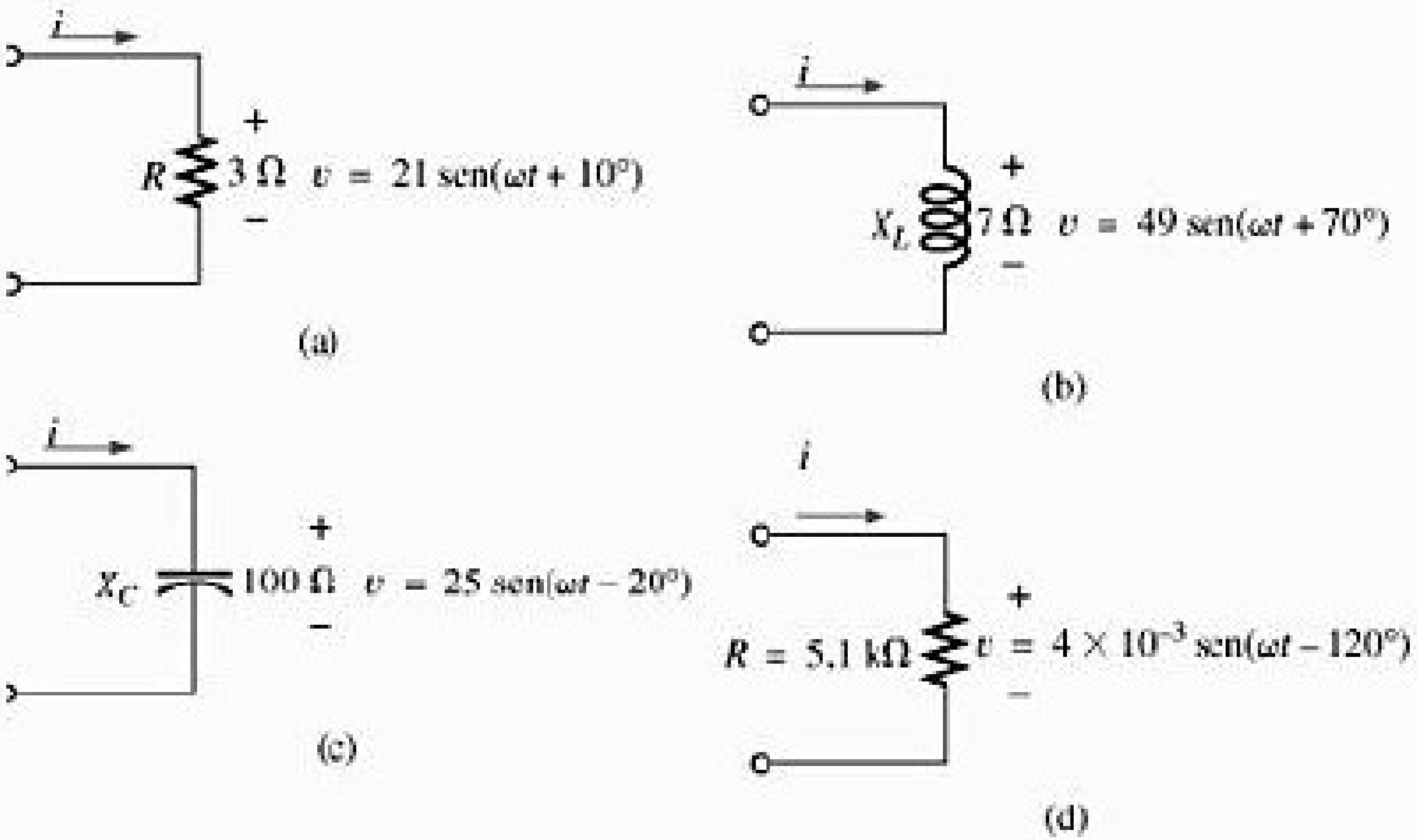
$i = 6 \operatorname{sen}(\omega t - 60°) \Rightarrow$ forma fasorial

$$\mathbf{I} = 4{,}242 \text{ A} \angle -60°$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = (I \angle\theta)(X_C \angle -90°) \\ &= (4{,}242 \text{ A} \angle -60°)(0{,}5\ \Omega \angle -90°) \\ &= 2{,}121 \text{ V} \angle -150° \end{aligned}$$

e $$\begin{aligned} v &= \sqrt{2}(2{,}121) \operatorname{sen}(\omega t - 150°) \\ &= \mathbf{3{,}0\ sen(\omega t - 150°)} \end{aligned}$$

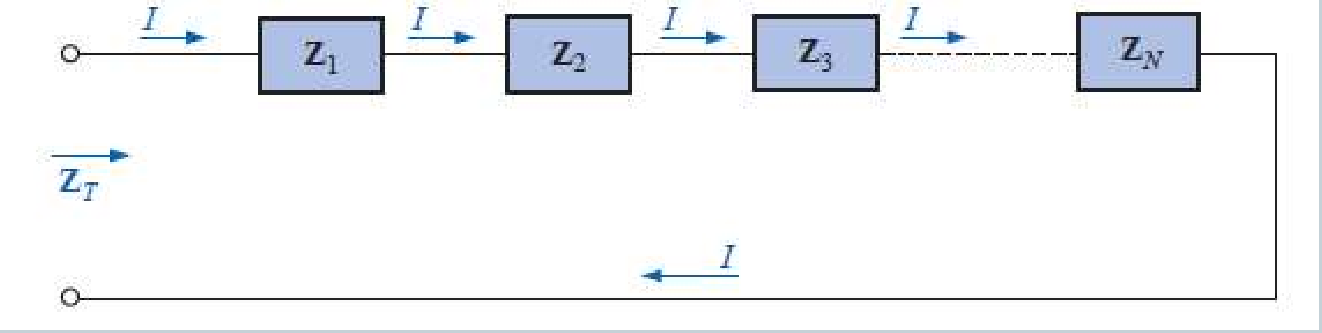
2. Determine a corrente i nos elementos da Figura 15.114 usando a álgebra dos números complexos. Esboce as formas de onda de v e i no mesmo gráfico.



ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS

ASSOCIAÇÃO SÉRIE

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_N$$



ASSOCIAÇÃO SÉRIE - EXEMPLO

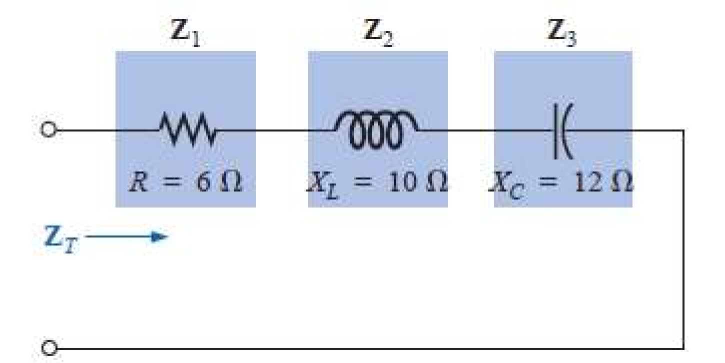
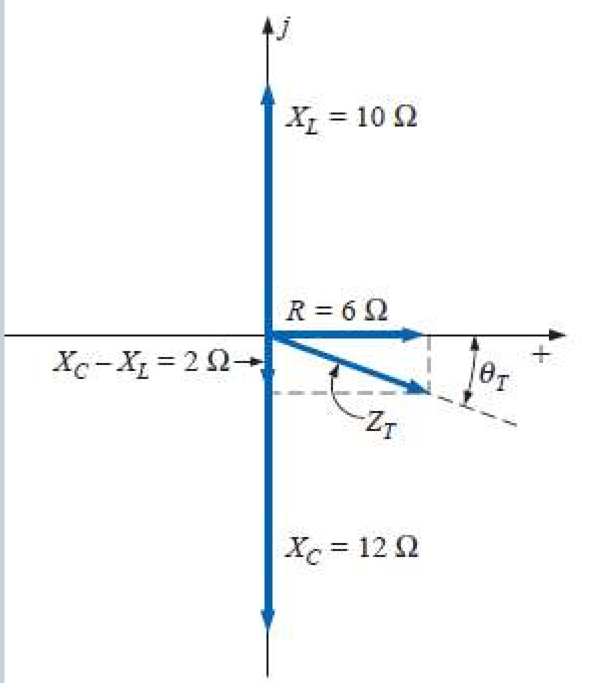


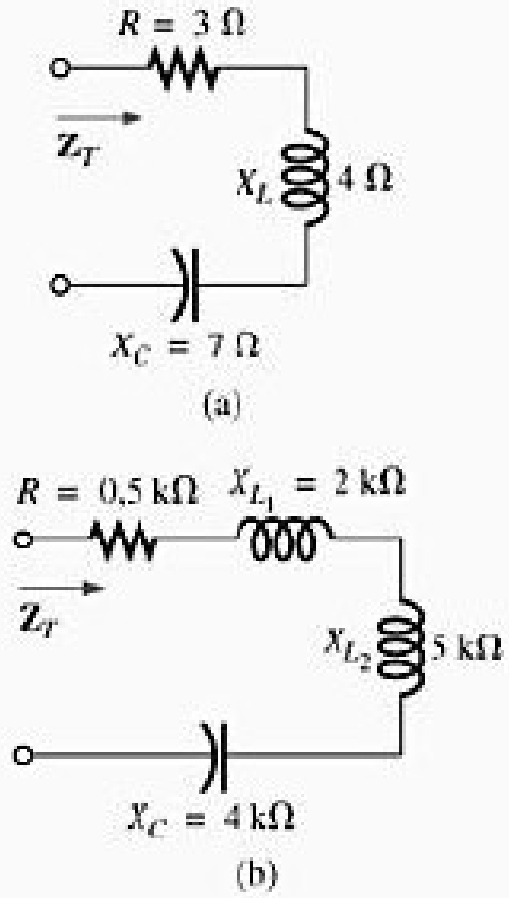
DIAGRAMA FASORIAL



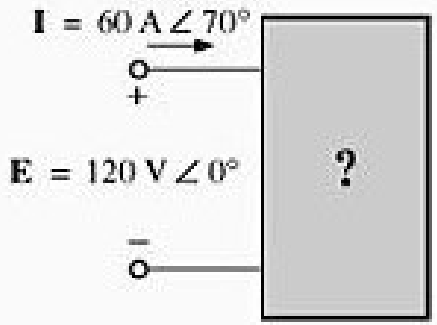
$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \\
&= R\angle 0^\circ + X_L\angle 90^\circ + X_C\angle -90^\circ \\
&= R + jX_L - jX_C \\
&= R + j(X_L - X_C) = 6\ \Omega + j(10\ \Omega - 12\ \Omega) = 6\ \Omega - j2\ \Omega
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{6.325\ \Omega\ \angle -18.43^\circ}$$

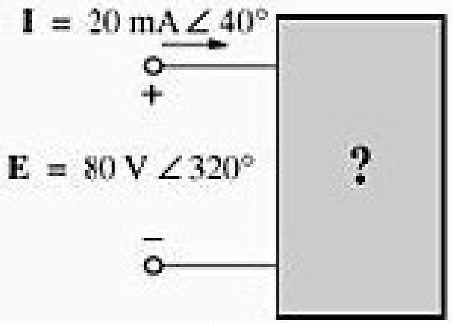
Calcule a impedância total dos circuitos mostrados na Figura 15.117. Expresse a resposta nas formas retangular e polar e construa o diagrama de impedâncias.



. Determine o tipo e o valor da impedância em ohms dos componentes dos circuitos em série que devem estar no interior das caixas vistas na Figura 15.118 para as tensões e as correntes indicadas (determine o circuito em série mais simples que satisfaça às condições indicadas).

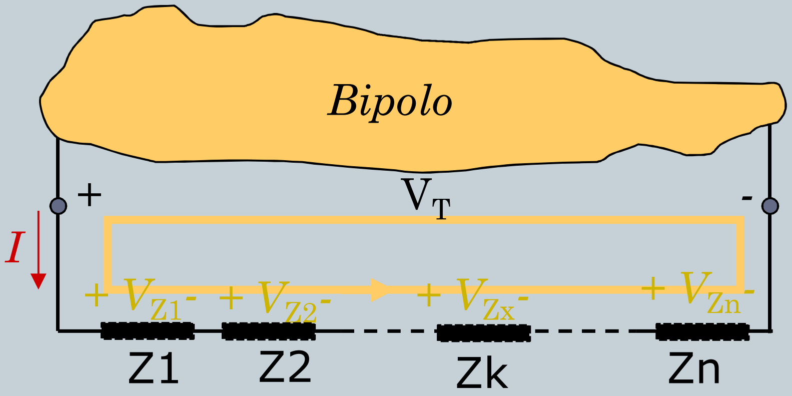


(a)



(b)

Divisor de Tensão



$$V_{Z1} + V_{Z2} + \ldots + V_{Zx} + \ldots + V_{Zn} - V_T = 0$$

$$I\,Z1 + I\,Z2 + \ldots + I\,Zx + \ldots + I\,Zn - V_T = 0$$

$$I = \frac{V_b}{Z1 + Z2 + \ldots + Zx + \ldots + Zn}$$

$$V_{Zx} = I\,Zx = \frac{Zx}{Z1 + Z2 + \ldots + Zx + \ldots + Zn} V_T$$

$$V_{Zx} = \frac{Zx}{ZT} V_T$$

Usando a regra dos divisores de tensão, calcule a tensão em cada elemento do circuito visto na Figura 15.40.

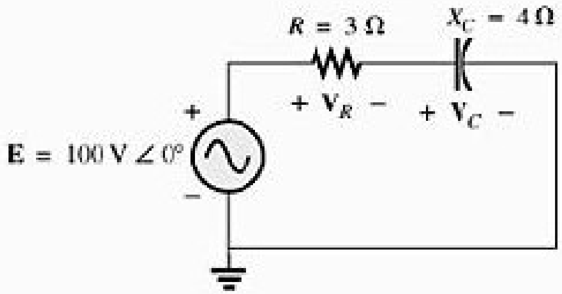


Figura 15.40 Exemplo 15.9.

Solução:

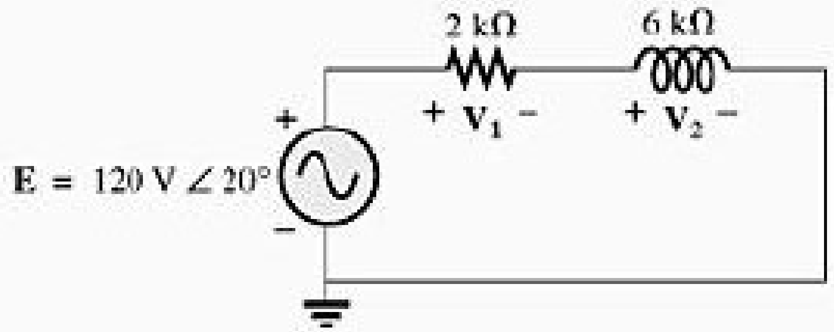
$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R} = \frac{(4\ \Omega \angle -90°)(100\ \text{V} \angle 0°)}{4\ \Omega \angle -90° + 3\ \Omega \angle 0°}$$

$$= \frac{400 \angle -90°}{3 - j\,4} = \frac{400 \angle -90°}{5 \angle -53{,}13°} = \mathbf{80\ V \angle -36{,}87°}$$

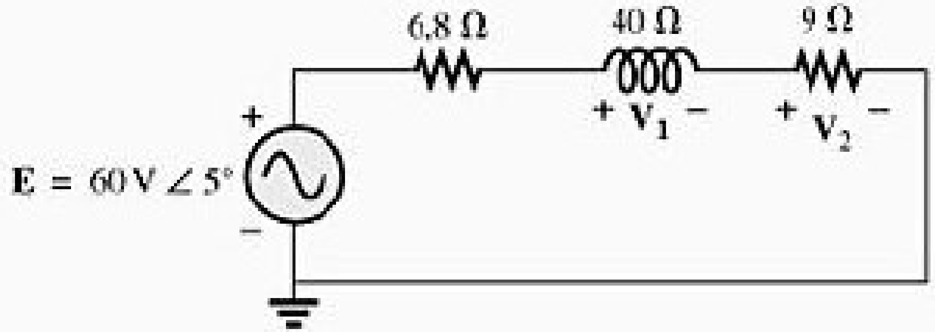
$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R} = \frac{(3\ \Omega \angle 0°)(100\ \text{V} \angle 0°)}{5\ \Omega \angle -53{,}13°}$$

$$= \frac{300 \angle 0°}{5 \angle -53{,}13°} = \mathbf{60\ V \angle +53{,}13°}$$

Calcule as tensões $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ para os circuitos vistos na Figura 15.127, em forma fasorial, usando a regra dos divisores de tensão.



(a)

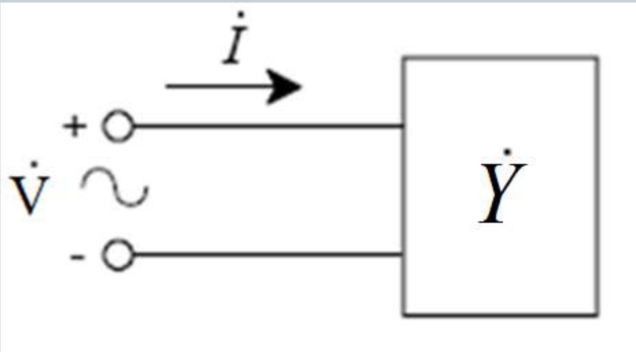


ADMITÂNCIA

RELAÇÃO ENTRE CORRENTE E TENSÃO

$$\boxed{\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{1}{\dot{Z}}}$$

(SIEMENS)



$$\boxed{\dot{Y} = G \pm jB}$$

CONDUTÂNCIA

SUSCEPTÂNCIA

ADMITÂNCIA

$$\dot{Y} = G \pm jB$$

$+jB$ CAPACITIVO

$-jB$ INDUTIVO

$$\dot{Y} = Y\angle \pm \varphi$$

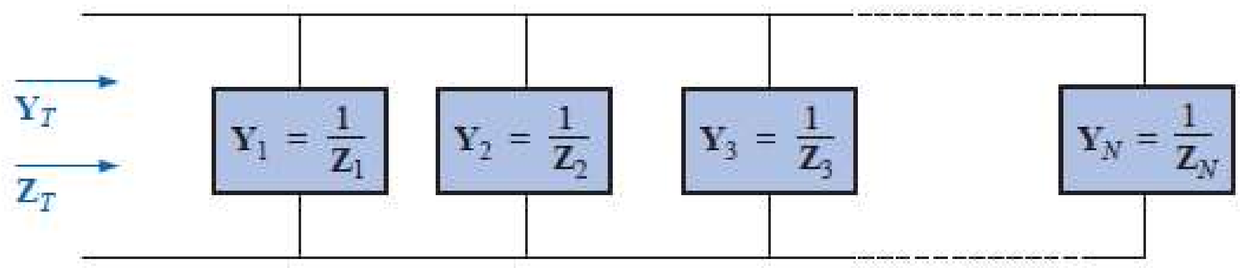
$+\varphi$ CAPACITIVO

$-\varphi$ INDUTIVO

ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS

ASSOCIAÇÃO PARALELO

$$\boxed{\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N}}$$



$$\boxed{\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \cdots + \mathbf{Y}_N}$$

ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS

CASOS PARTICULARES DA ASSOCIAÇÃO EM PARALELO

DUAS IMPEDÂNICIAS EM PARALELO

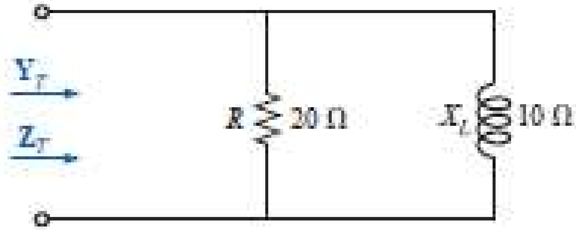
$$\boxed{\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}}$$

N IMPEDÂNCIAS EM PARALELO

$$\boxed{\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}}{N}}$$

NÚMERO DE ELEMENTOS ASSOCIADOS

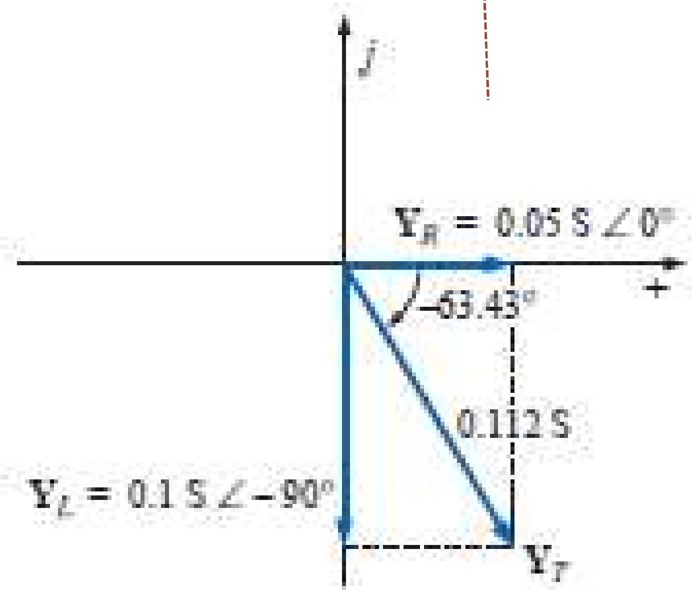
ASSOCIAÇÃO PARALELO - EXEMPLO



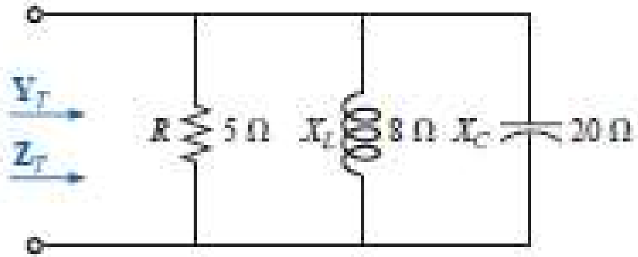
$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(20\ \Omega \angle 0°)(10\ \Omega \angle 90°)}{20\ \Omega + j\,10\ \Omega}$$
$$= \frac{200\ \Omega \angle 90°}{22.36 \angle 26.57°} = \mathbf{8.93\ \Omega \angle 63.43°}$$

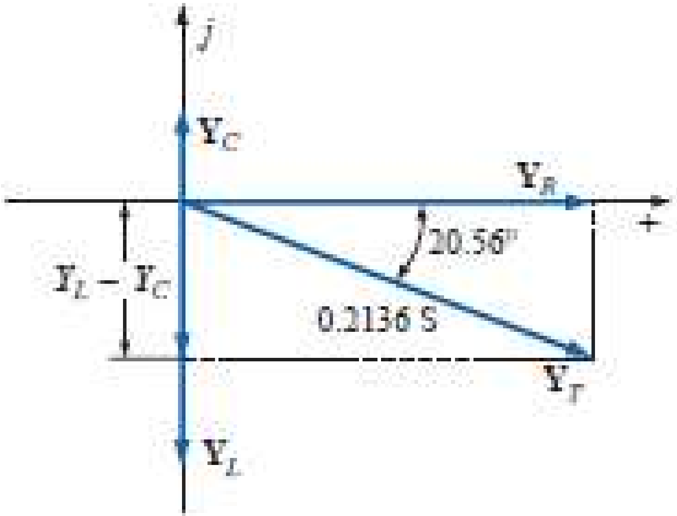
$$\mathbf{Y}_R = G \angle 0° = \frac{1}{R} \angle 0° = \frac{1}{20\ \Omega} \angle 0°$$
$$= \mathbf{0.05\ S \angle 0° = 0.05\ S} + j\,\mathbf{0}$$
$$\mathbf{Y}_L = B_L \angle -90° = \frac{1}{X_L} \angle -90° = \frac{1}{10\ \Omega} \angle -90°$$
$$= \mathbf{0.1\ S \angle -90° = 0 - } j\,\mathbf{0.1\ S}$$
$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L = (0.05\ S + j\,0) + (0 - j\,0.1\ S)$$
$$= \mathbf{0.05\ S} - j\,\mathbf{0.1\ S} = G - jB_L$$
$$\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{0.05\ S - j\,0.1\ S} = \frac{1}{0.112\ S \angle -63.43°}$$
$$= \mathbf{8.93\ \Omega \angle 63.43°}$$

DIAGRAMA FASORIAL



ASSOCIAÇÃO PARALELO - EXEMPLO





$$\mathbf{Y}_R = G \angle 0° = \frac{1}{R} \angle 0° = \frac{1}{5\ \Omega} \angle 0°$$

$$= \mathbf{0{,}2\ S \angle 0° = 0{,}2\ S + \mathit{j}\ 0}$$

$$\mathbf{Y}_L = B_L \angle -90° = \frac{1}{X_L} \angle -90° = \frac{1}{8\ \Omega} \angle -90°$$

$$= \mathbf{0{,}125\ S \angle -90° = 0 - \mathit{j}\ 0{,}125\ S}$$

$$\mathbf{Y}_C = B_C \angle 90° = \frac{1}{X_C} \angle 90° = \frac{1}{20\ \Omega} \angle 90°$$

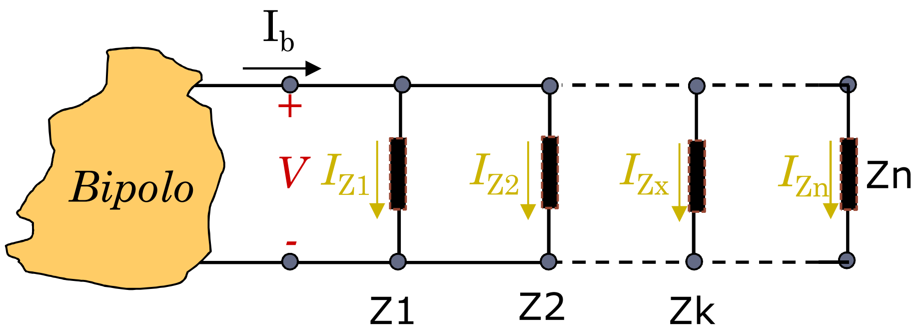
$$= \mathbf{0{,}050\ S \angle +90° = 0 + \mathit{j}\ 0{,}050\ S}$$

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C$$

$$= (0{,}2\ S + j\ 0) + (0 - j\ 0{,}125\ S) + (0 + j\ 0{,}050\ S)$$

$$= 0{,}2\ S - j\ 0{,}075\ S = \mathbf{0{,}2136\ S \angle -20{,}56°}$$

Divisor de Corrente



$$I_{Z1} + I_{Z2} + \dots + I_{Zx} + \dots + I_{Zn} - I_b = 0$$

$$\frac{V}{Z1} + \frac{V}{Z2} + \dots + \frac{V}{Zx} + \dots + \frac{V}{Vn} - I_b = 0$$

$$V = \frac{I_b}{\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2} + \dots + \frac{1}{Zx} + \dots + \frac{1}{Zn}}$$

$$I_{Zx} = \frac{V}{Zx} = \frac{1}{Zx} \cdot \frac{I_T}{\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2} + \dots + \frac{1}{Zx} + \dots + \frac{1}{Zn}}$$

$$I_{Zx} = I_T \frac{Z_T}{Zx}$$

Usando a regra dos divisores de corrente, calcule as correntes em cada uma das impedâncias vistas na Figura 15.77.

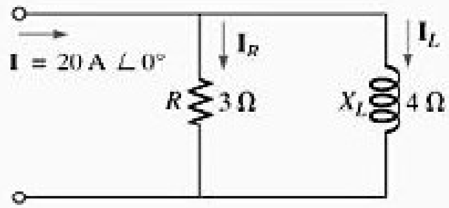


Figura 15.77 Exemplo 15.15.

Solução:

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{Z}_L\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(4\ \Omega\ \angle 90^\circ)(20\ \text{A}\ \angle 0^\circ)}{3\ \Omega\ \angle 0^\circ + 4\ \Omega\ \angle 90^\circ}$$

$$= \frac{80\ \text{A}\angle 90^\circ}{5\ \angle 53{,}13^\circ}$$

$$= \mathbf{16\ A\ \angle 36{,}87^\circ}$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(3\ \Omega\ \angle 0^\circ)(20\ \text{A}\ \angle 0^\circ)}{5\ \Omega\ \angle 53{,}13^\circ}$$

$$= \frac{60\ \text{A}\angle 0^\circ}{5\ \angle 53{,}13^\circ}$$

$$= \mathbf{12\ A\ \angle -53{,}13^\circ}$$

Usando a regra dos divisores de corrente, determine as correntes nos dois ramos do circuito visto na Figura 15.78.

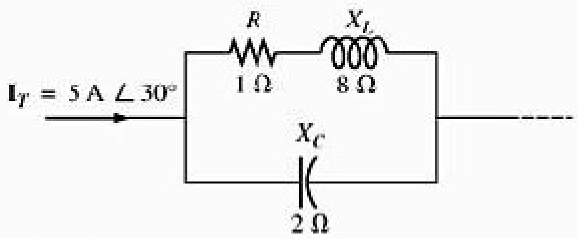


Figura 15.78 Exemplo 15.16.

Solução:

$$\mathbf{I}_{R\text{-}L} = \frac{\mathbf{Z}_C \mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_{R\text{-}L}}$$

$$= \frac{(2\ \Omega\ \angle -90^\circ)(5\ \text{A}\ \angle 30^\circ)}{-j\,2\ \Omega + 1\ \Omega + j\,8\ \Omega} = \frac{10\ \text{A} \angle -60^\circ}{1 + j\,6}$$

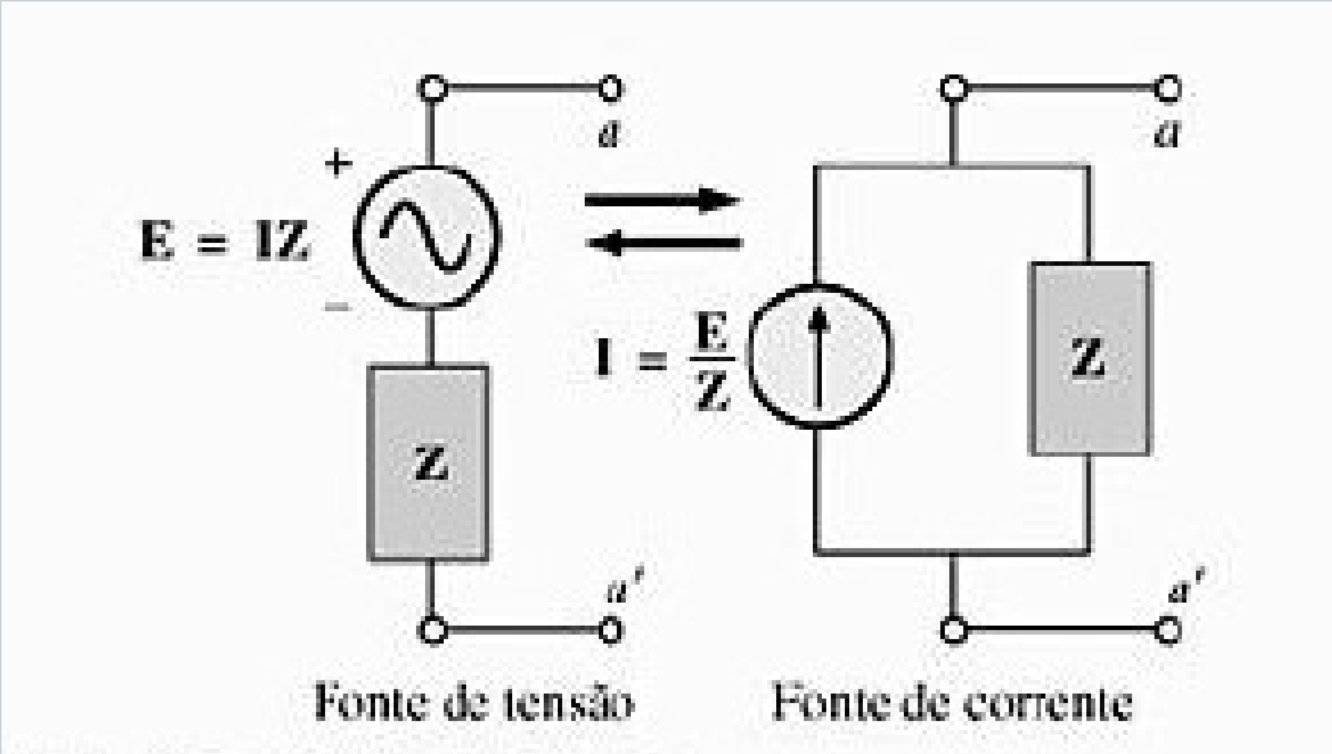
$$= \frac{10\ \text{A} \angle -60^\circ}{6{,}083\ \angle 80{,}54^\circ} \cong \mathbf{1{,}644\ A\ \angle -140{,}54^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{Z}_{R\text{-}L} \mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_{R\text{-}L} + \mathbf{Z}_C} = \frac{(1\ \Omega + j\,8\ \Omega)(5\ \text{A}\ \angle 30^\circ)}{6{,}08\ \Omega\ \angle 80{,}54^\circ}$$

$$= \frac{(8{,}06\ \angle 82{,}87^\circ)(5\ \text{A} \angle 30^\circ)}{6{,}08\ \angle 80{,}54^\circ}$$

$$= \frac{40{,}30\ \text{A} \angle 112{,}87^\circ}{6{,}083\ \angle 80{,}54^\circ} = \mathbf{6{,}625\ A\ \angle 32{,}33^\circ}$$

EQUIVALÊNCIA ENTRE FONTES



Converta a fonte de tensão vista na Figura 17.6(a) em fonte de corrente.

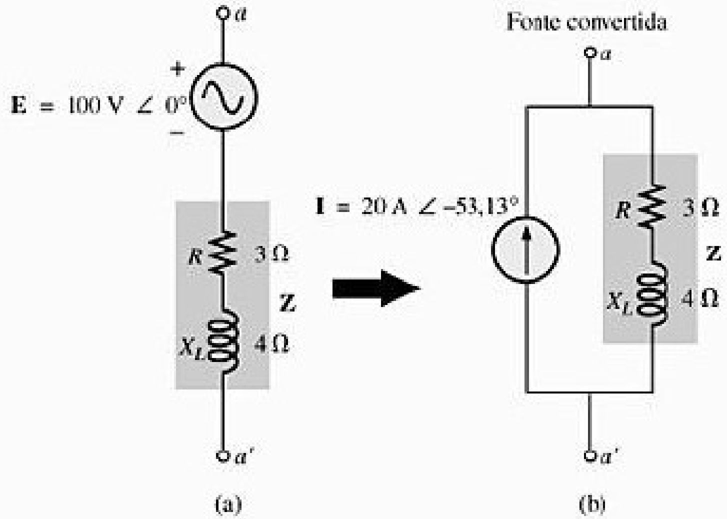


Figura 17.6 Exemplo 17.1.

Solução:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\text{ V} \angle 0^\circ}{5\ \Omega \angle 53{,}13^\circ}$$

$$= \mathbf{20\ A \angle -53{,}13^\circ} \qquad \text{(Figura 17.6(b))}$$

Converta a fonte de corrente vista na Figura 17.7(a) em fonte de tensão.

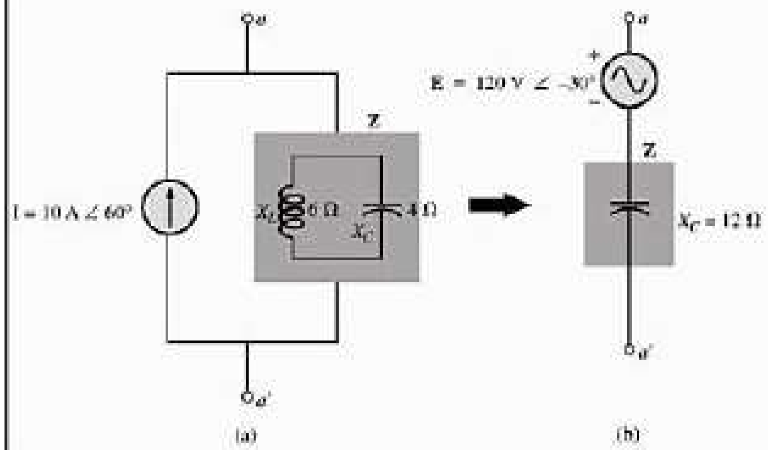


Figura 17.7 Exemplo 17.2.

Solução:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L}$$

$$= \frac{(X_C \angle -90^\circ)(X_L \angle 90^\circ)}{-j\,X_C + j\,X_L}$$

$$= \frac{(4\ \Omega \angle -90^\circ)(6\ \Omega \angle 90^\circ)}{-j\,4\ \Omega + j\,6\ \Omega}$$

$$= \frac{24\ \Omega \angle 0^\circ}{2 \angle 90^\circ}$$

$$= \mathbf{12\ \Omega \angle -90^\circ} \qquad \text{(Figura 17.7(b))}$$

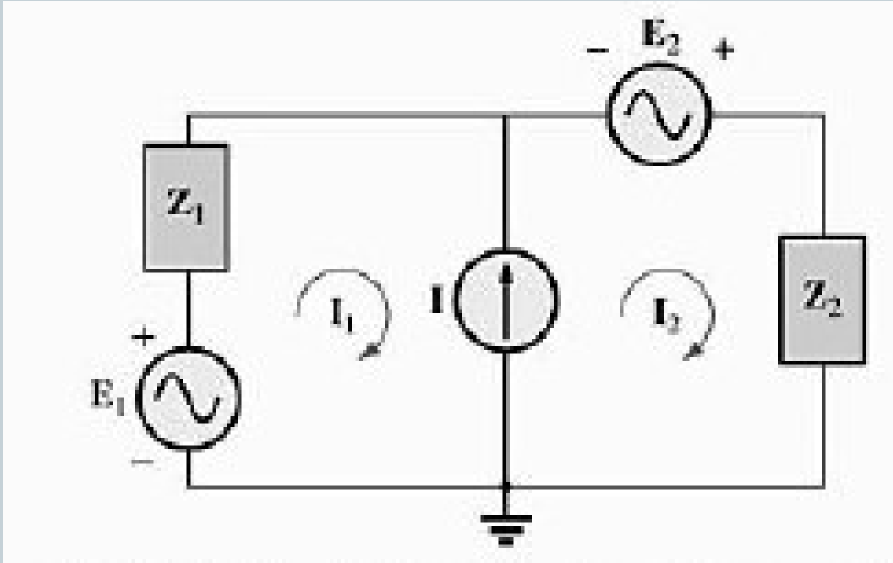
$$\mathbf{E} = \mathbf{IZ} = (10\text{ A} \angle 60^\circ)(12\ \Omega \angle -90^\circ)$$

$$= \mathbf{120\ V \angle -30^\circ} \qquad \text{(Figura 17.7(b))}$$

Leis de Kirchhoff

LEI DAS MALHAS

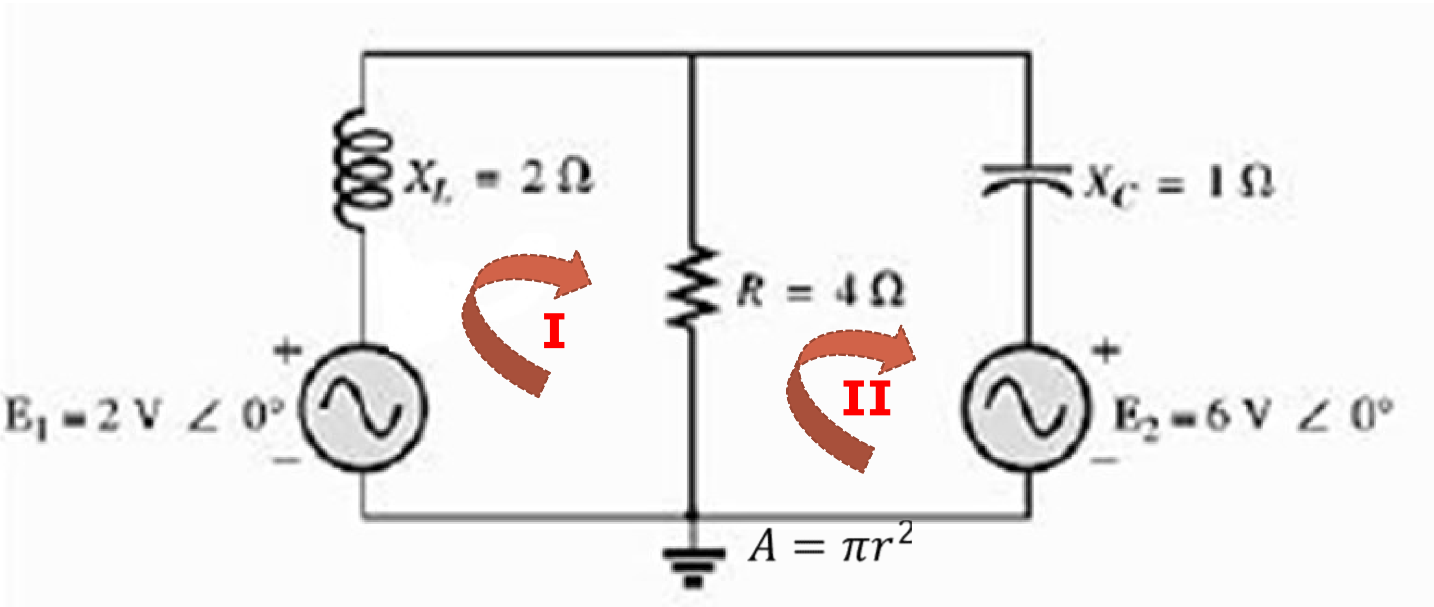
$$\boxed{\sum_{m=1}^{M} V_{MALHA} = 0}$$



RESTRIÇÃO: APLICÁVEL SOMENTE PARA CIRCUITOS COM FONTES DE TENSÃO

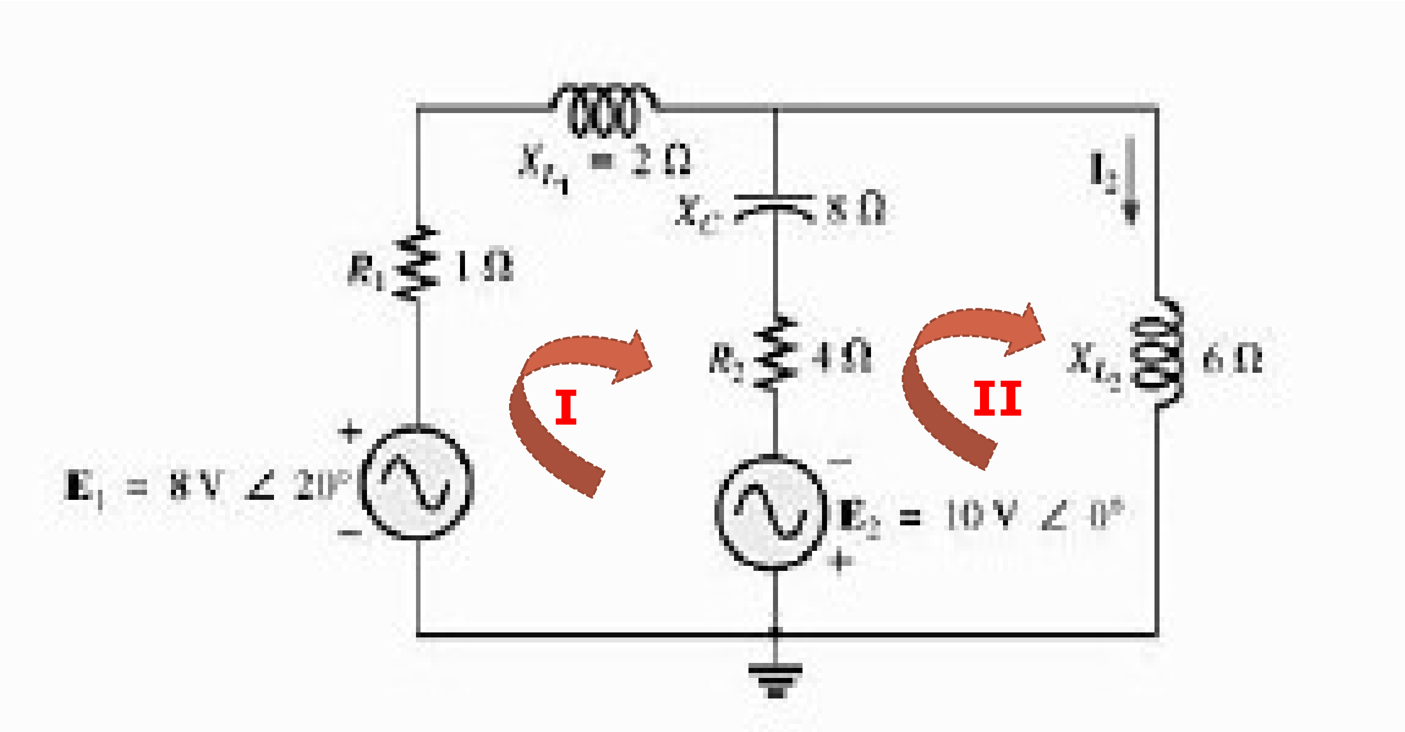
OBJETIVO: DETERMINAR AS CORRENTES NAS MALHAS

DETERMINAR AS CORRENTES NAS MALHAS



$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + j2 & -4 \\ -4 & 4 - j \end{bmatrix}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 < 0 \\ -6 < 0 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,61 < 123,69 \\ 4,47 < 153,43 \end{bmatrix}$$



$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - j6 & -4 + j8 \\ -4 + j8 & 4 - j2 \end{bmatrix}$$

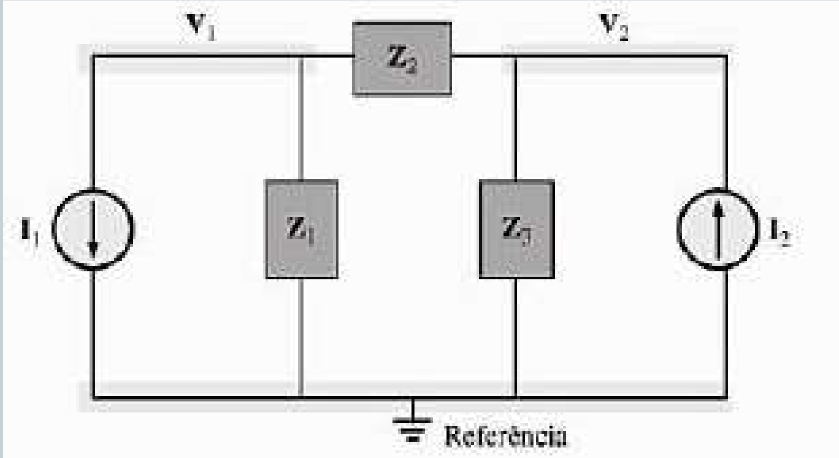
$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,73 < 8,88 \\ -10 < 0 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,04 < 29,38 \\ 1,27 < -86,94 \end{bmatrix}$$

Leis de Kirchhoff

LEI DOS NÓS

$$\boxed{\sum_{m=1}^{M} I_{NÓ} = 0}$$

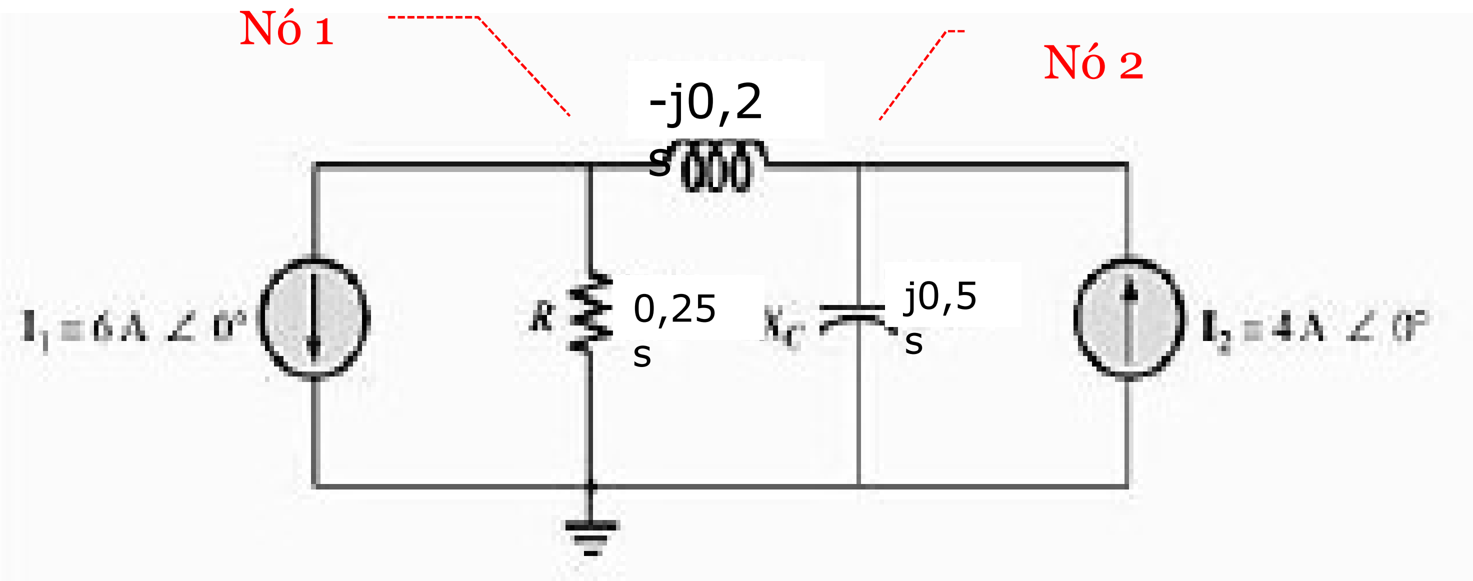


$$\boxed{\begin{array}{l} I_{CHEGANDO} : POSITIVO \\ I_{SAINDO} : NEGATIVO \end{array}}$$

RESTRIÇÃO: APLICÁVEL SOMENTE PARA CIRCUITOS COM FONTES DE CORRENTE

OBJETIVO: DETERMINAR AS TENSÕES NODAIS

DETERMINAR AS TENSÕES NODAIS

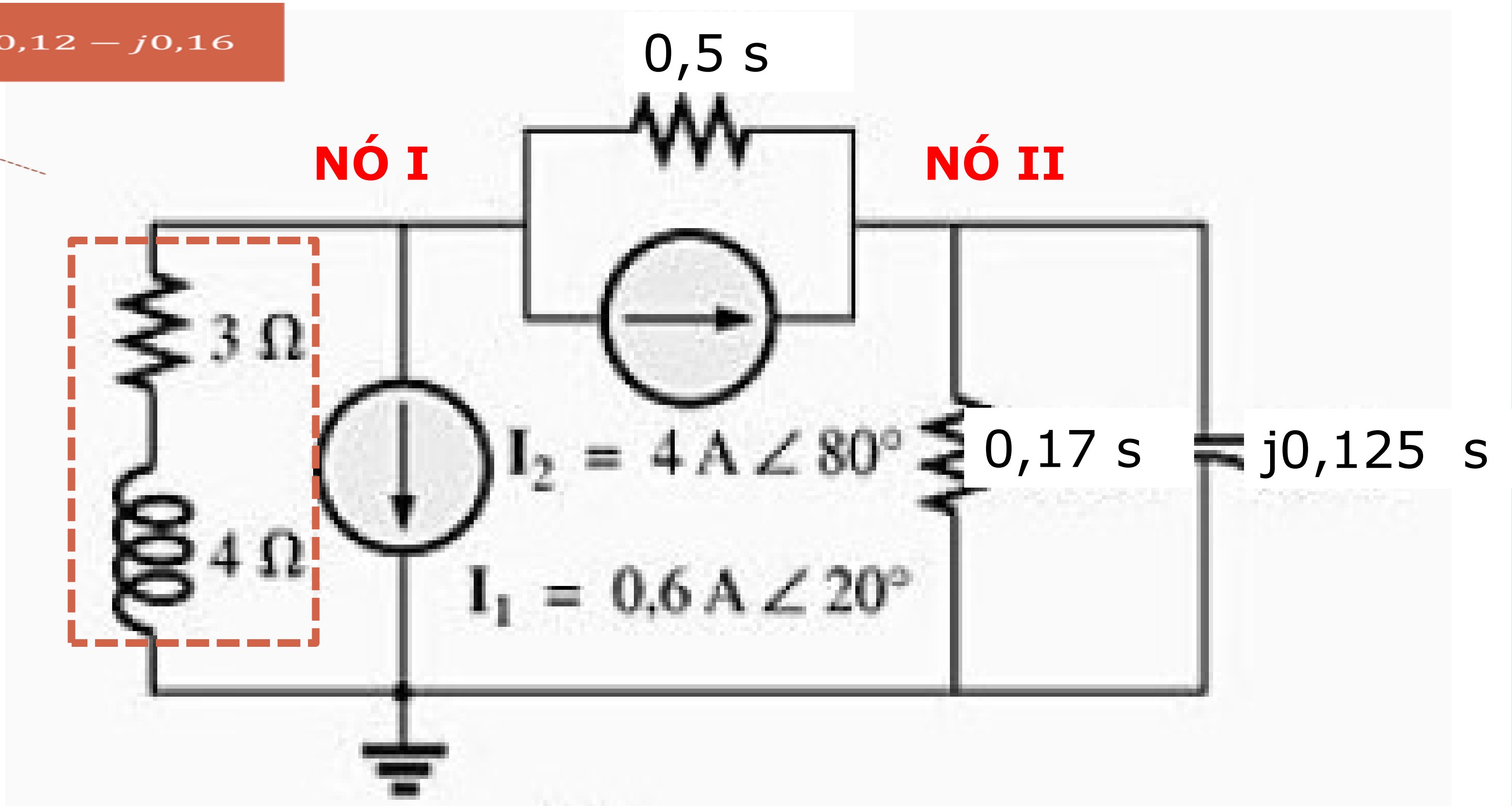


$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 - j0,2 & j0,2 \\ j0,2 & j0,3 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 < 0 \\ -4 < 0 \end{bmatrix}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,8 < 53,13 \\ 8,61 < 164 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3+j4} = 0{,}12 - j0{,}16$$

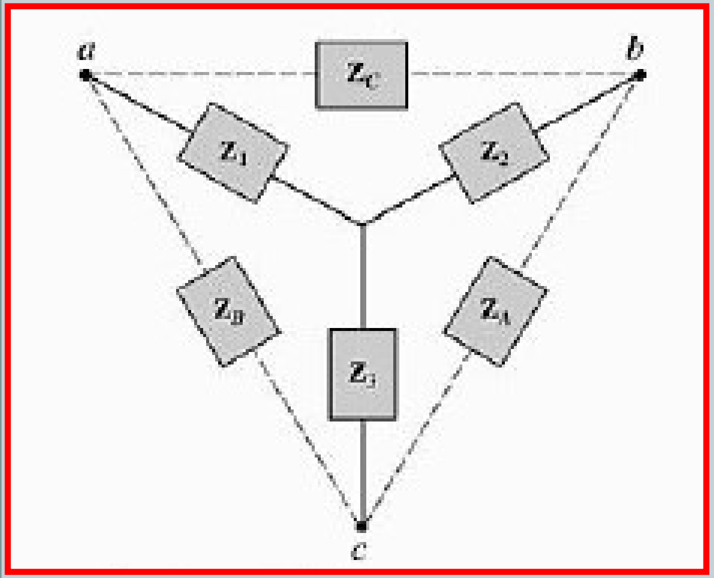


$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}62 - j016 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}67 + j0{,}125 \end{vmatrix}$$

$$[\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_1} \\ \boldsymbol{I_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{4,33 < 73,11} \\ \mathbf{-4 < 80} \end{bmatrix}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} 5{,}14 < 100{,}43 \\ 2{,}68 < -139{,}89 \end{bmatrix}$$

ASSOCIAÇÃO Δ-Y



IMPEDÂNCIAS IGUAIS

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3}$$

$\Delta \rightarrow Y$

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

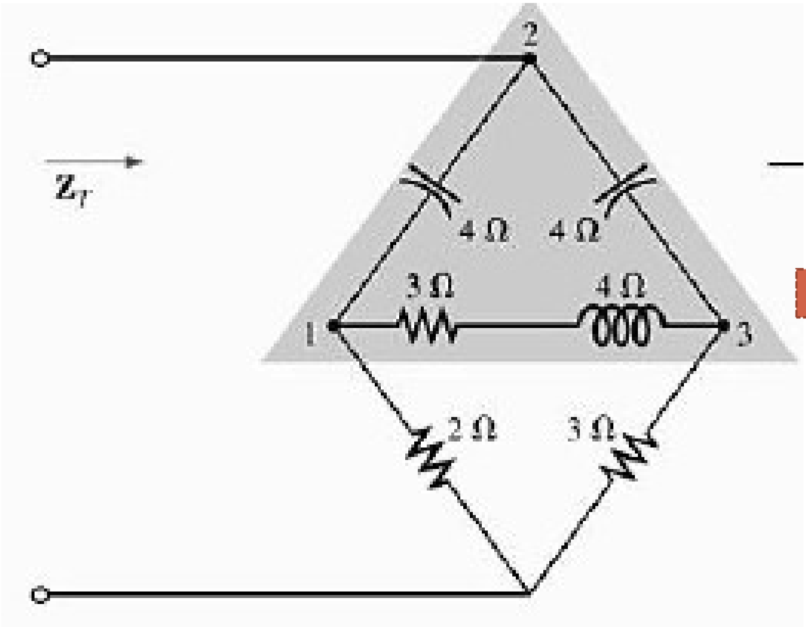
$Y \rightarrow \Delta$

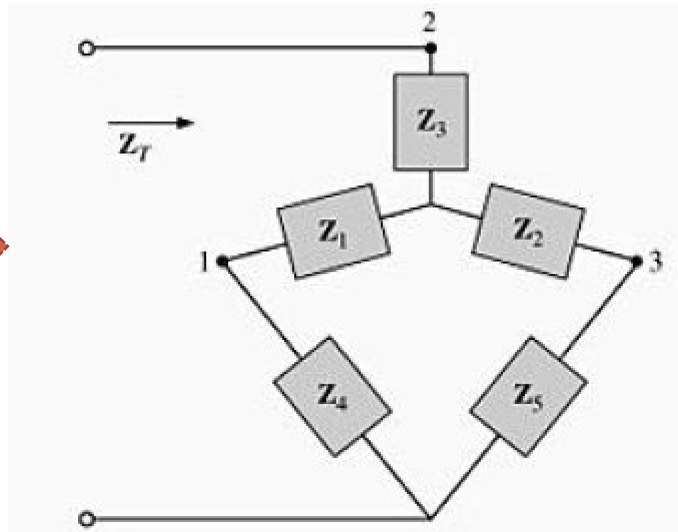
$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$$

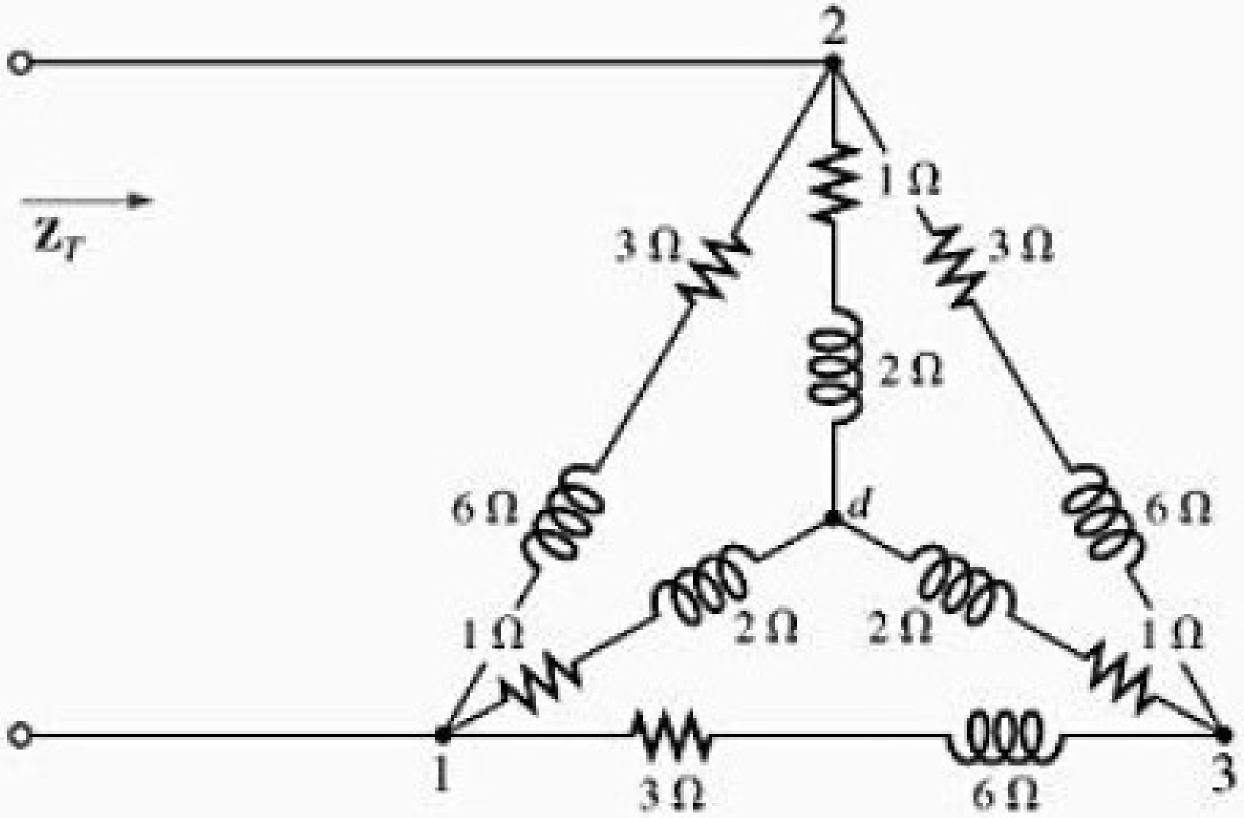
$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$$

DETERMINE Zt NO CIRCUITO A SEGUIR





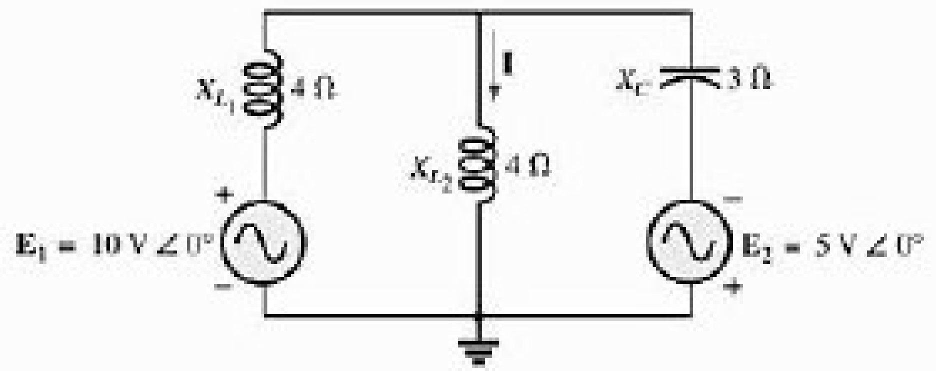
Utilizando as transformações Δ-Y e Y-Δ, determine a impedância total $\mathbf{Z}_T$ para o circuito mostrado na Figura 17.50.



TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO DO EFEITOS

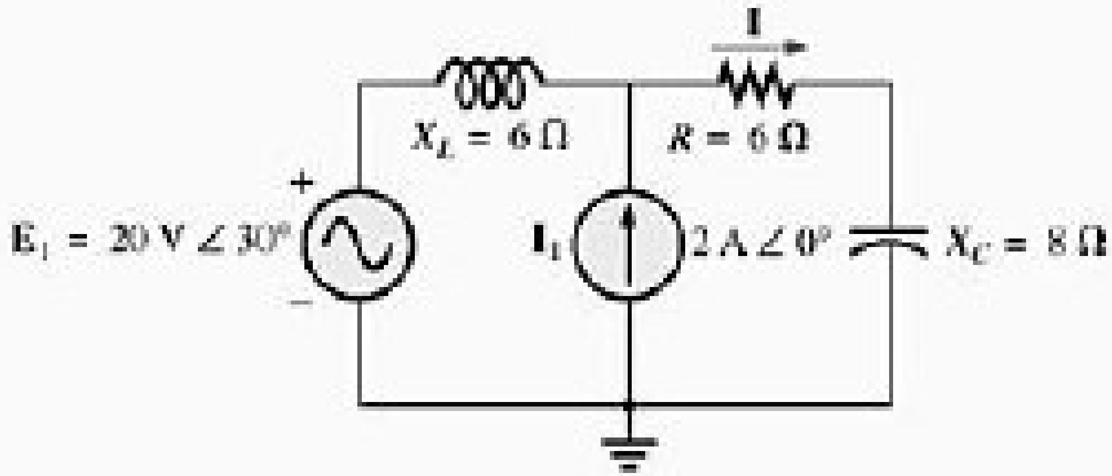
"Dado um circuito que tem somente elementos lineares e mais de uma fonte de tensão e/ou corrente. A corrente (ou tensão) em um determinado trecho do circuito pode ser determinada somando-se algebricamente as correntes (tensões) individuais de cada gerador quando os outros forem eliminados (gerador de tensão colocado em curto circuito e gerador de corrente colocados em aberto)."

Usando o teorema da superposição, determine a corrente **I** na reatância de 4 Ω (X_{L_2}) vista na Figura 18.1.



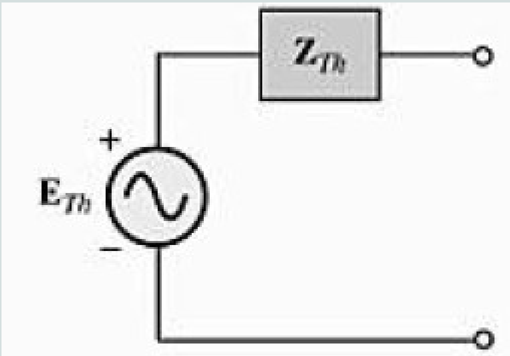
TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO DO EFEITOS

Usando o teorema da superposição, determine a corrente **I** no resistor de 6 Ω visto na Figura 18.6.

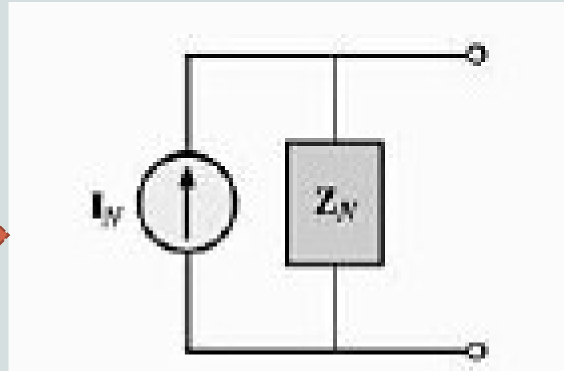


TEOREMA DE THÉVENIN E NORTON

THEVENIN	NORTON
Todo o circuito linear e bipolar pode ser transformado em um circuito equivalente contendo uma fonte de tensão em série com uma impedância.	Todo o circuito linear e bipolar pode ser transformado em um circuito equivalente contendo uma fonte de corrente em paralelo com uma impedância.

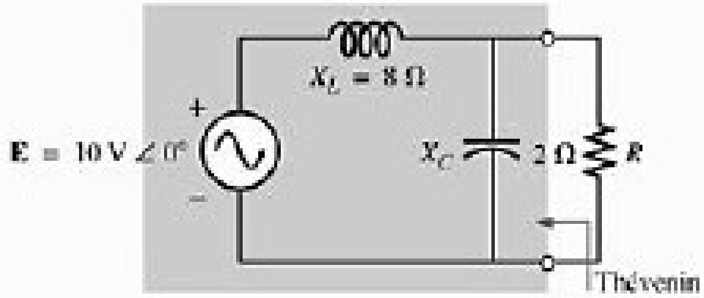


Circuitos equivalentes



THÉVENIN

1. *Remova a parte do circuito para a qual o circuito equivalente de Thévenin será determinado.*
2. *Assinale claramente (○, ● ou outro sinal) os dois terminais do circuito resultante.*
3. *Calcule Z_{Th} anulando primeiramente todas as fontes de tensão e de corrente (substituindo-as por curtos-circuitos e circuitos abertos, respectivamente) e então determinando a impedância resultante entre os dois terminais assinalados.*
4. *Calcule E_{Th} recolocando as fontes de tensão e de corrente e calculando a tensão de circuito aberto entre os terminais assinalados.*
5. *Desenhe o circuito equivalente de Thévenin com a parte do circuito previamente removida colocada entre os terminais do circuito equivalente de Thévenin.*

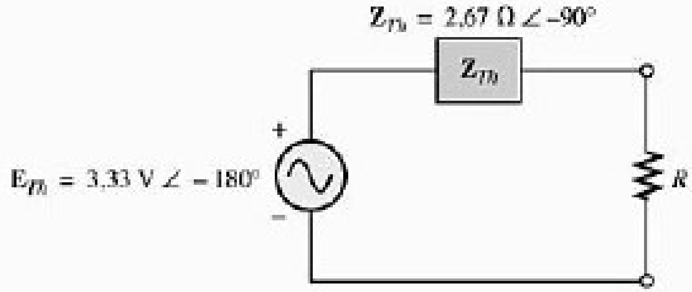


$$Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(j\,8\ \Omega)(-j\,2\ \Omega)}{j\,8\ \Omega - j\,2\ \Omega} = \frac{-j^2 16\ \Omega}{j\,6}$$

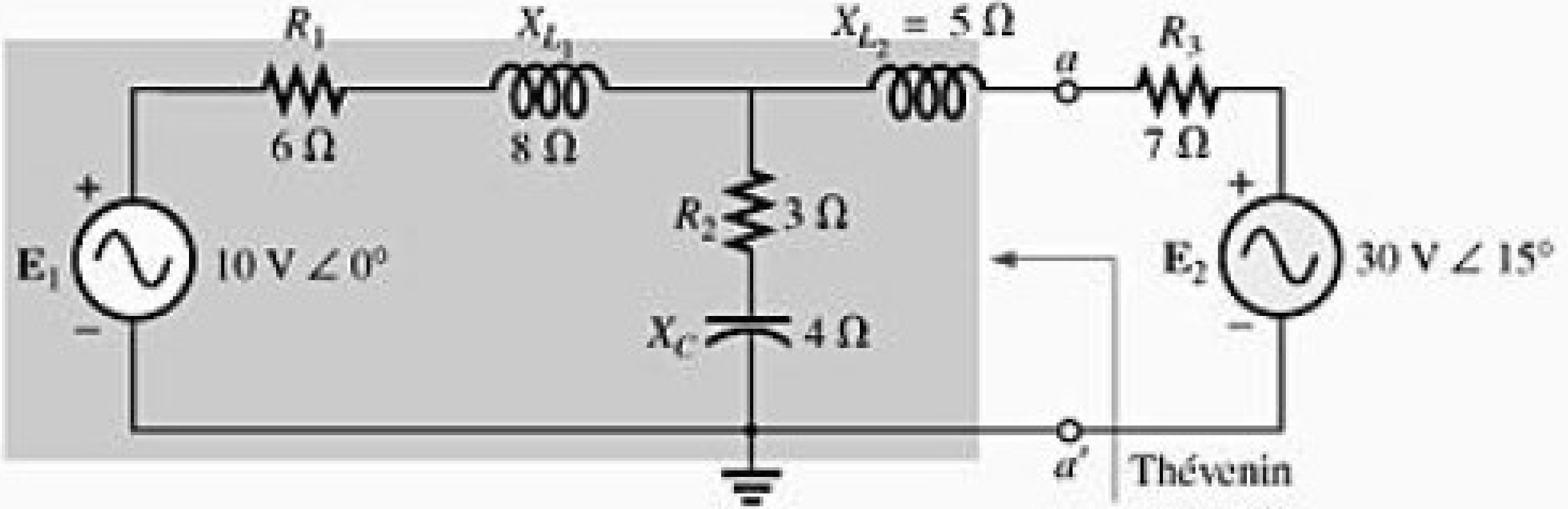
$$= \frac{16\ \Omega}{6\ \angle 90°} = \mathbf{2{,}67\ \Omega\ \angle -90°}$$

$$E_{Th} = \frac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2} \qquad \text{(regra do divisor de tensão)}$$

$$= \frac{(-j\,2\ \Omega)(10\ V)}{j\,8\ \Omega - j\,2\ \Omega} = \frac{-j\,20\ V}{j\,6} = \mathbf{3{,}33\ V\ \angle -180°}$$

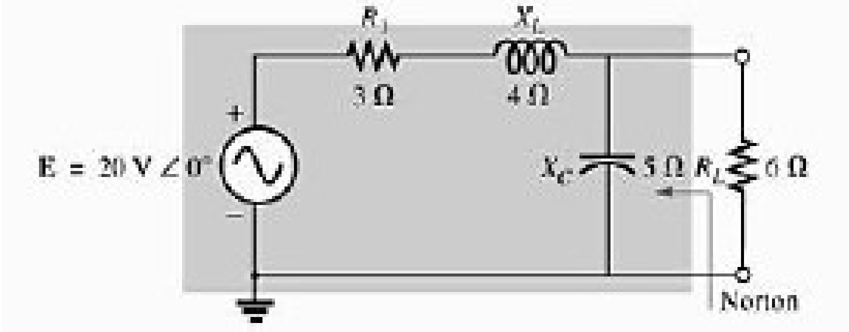


Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito externa ao ramo a-a' que vemos na Figura 18.28.



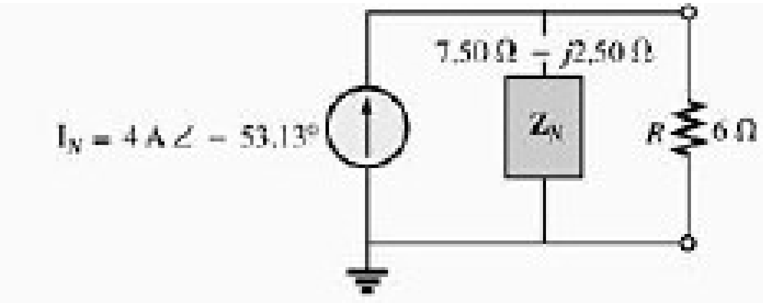
NORTON

1. *Remova a parte do circuito para a qual o circuito equivalente de Norton deve ser obtido.*
2. *Assinale claramente (○, ● ou outro sinal) os dois terminais do circuito resultante.*
3. *Calcule $\mathbf{Z_N}$ anulando primeiramente todas as fontes de tensão e de corrente (substituindo-as por curtos-circuitos e circuitos abertos, respectivamente) e obtendo em seguida a impedância resultante entre os dois terminais assinalados.*
4. *Obtenha $\mathbf{I_N}$ recolocando as fontes de tensão e de corrente no circuito e calculando a corrente de curto-circuito entre os terminais assinalados.*
5. *Desenhe o circuito equivalente de Norton com a parte do circuito previamente removida colocada entre os terminais do circuito equivalente de Norton.*



$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(5\ \Omega\ \angle 53{,}13°)(5\ \Omega\ \angle -90°)}{3\ \Omega + j\,4\ \Omega - j\,5\ \Omega}$$
$$= \frac{25\ \Omega\ \angle -36{,}87°}{3 - j\,1} = \frac{25\ \Omega\ \angle -36{,}87°}{3{,}16\ \angle -18{,}43°}$$
$$= 7{,}91\ \Omega\ \angle -18{,}44° = \mathbf{7{,}50\ \Omega - j\,2{,}50\ \Omega}$$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{20\ \text{V}\ \angle 0°}{5\ \Omega\ \angle 53{,}13°} = \mathbf{4\ A}\ \angle\ \mathbf{-53{,}13°}$$



RECOMENDAÇÕES

RESOLVER OS EXERCÍCIOS DOS CAPÍTULOS 14, 15, 16 E 17 E 18 DO LIVRO DO BOYLESTAD

VAMOS A LUTA FILHOS DA PÁTRIA!

CIRCUITOS ELÉTRICOS II

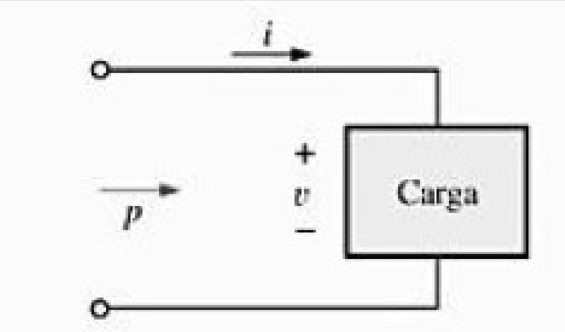
4ª Termo

Engenharias:

Elétrica
Mecânica
Computação

PROF. DR. GIULIANO PIERRE ESTEVAM

POTÊNCIA EM REGIME AC



$$v = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$
$$i = I_m \operatorname{sen} \omega t$$

$$p = vi$$

$$p = V_m I_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

$$\boxed{p = VI \cos\theta(1 - \cos 2\omega t) + VI \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen} 2\omega t)}$$

$$p = VI\cos\theta - VI\cos\theta\cos 2\omega t + VI \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\omega t$$

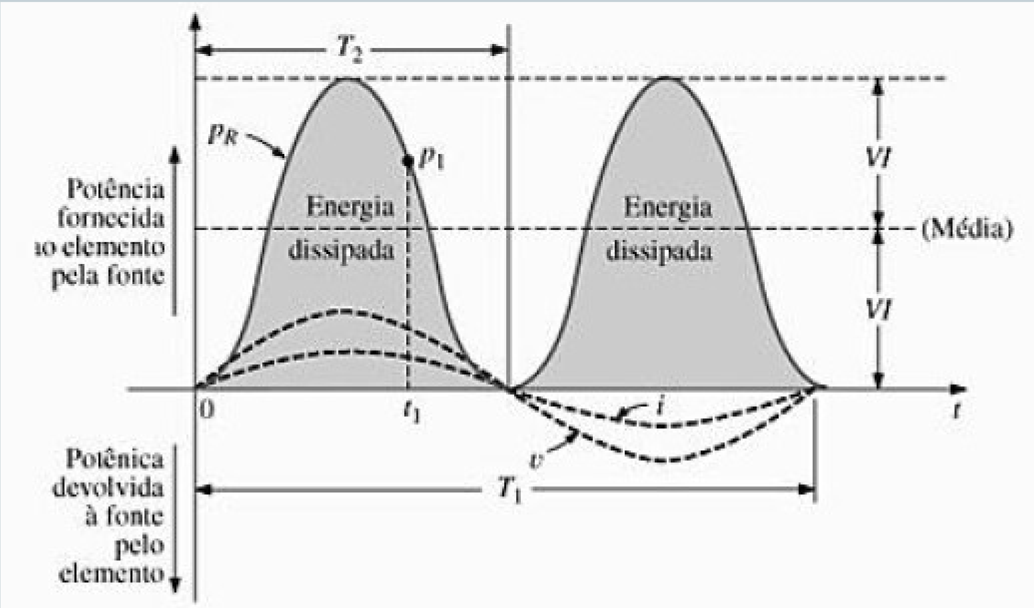
CIRCUITOS RESISTIVOS

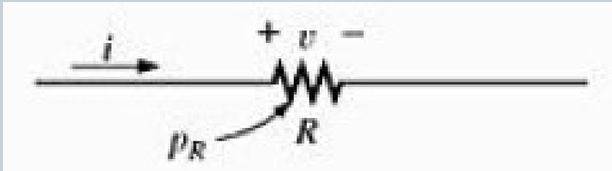
$$\theta = 0^\circ$$

$$\begin{aligned} p_R &= VI\cos(0^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI\,\mathrm{sen}(0^\circ)\,\mathrm{sen}\,2\omega t \\ &= VI(1 - \cos 2\omega t) + 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{p_R = VI - VI\cos 2\omega t}$$

POTÊNCIA
ATIVA
(W)





$$\boxed{P = VI = \frac{V_m I_m}{2} = I^2 R = \frac{V^2}{R}}$$

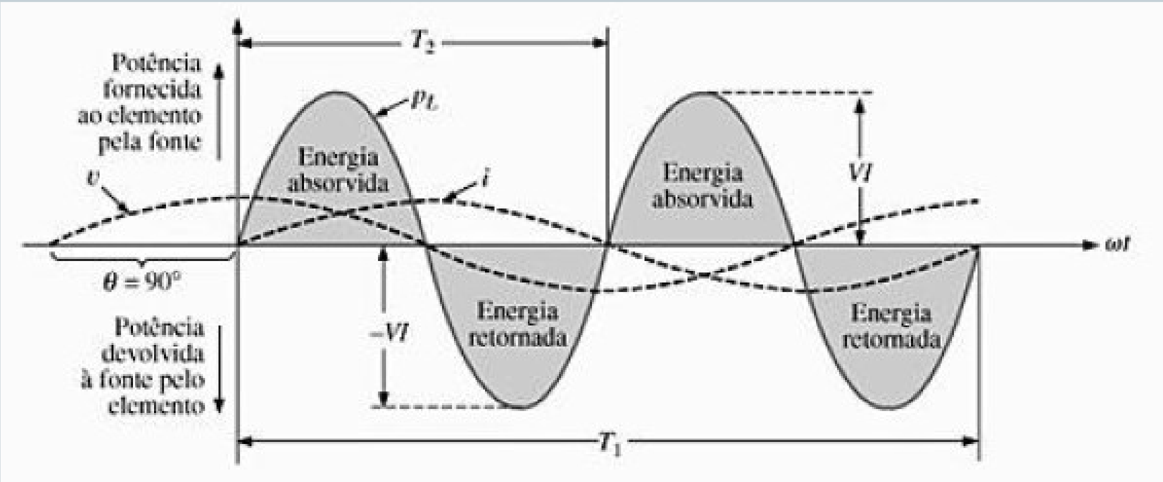
CIRCUITOS INDUTIVOS

θ=90º

$$p_L = VI\cos(90°)(1 - \cos 2\omega t) + VI\,\text{sen}(90°)(\text{sen}\,2\omega t)$$
$$= 0 + VI\,\text{sen}\,2\omega t$$

$$\boxed{p_L = VI\,\text{sen}\,2\omega t}$$

POTÊNCIA REATIVA INDUTIVA (Var)



$$\boxed{Q_L = VI}$$

$$\boxed{Q_L = I^2X_L}$$

$$\boxed{Q_L = \frac{V^2}{X_L}}$$

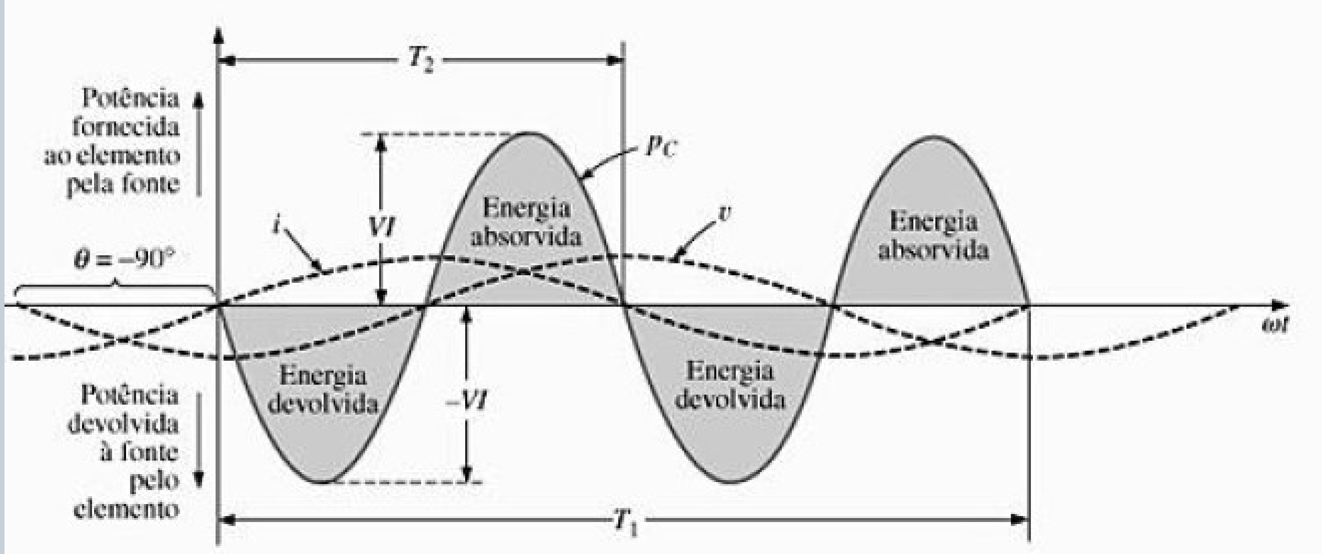
CIRCUITOS CAPACITIVOS

$$\theta = -90^o$$

$$p_C = VI\cos(-90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI\,\mathrm{sen}(-90^\circ)(\mathrm{sen}\,2\omega t)$$
$$= 0 - VI\,\mathrm{sen}\,2\omega t$$

$$\boxed{p_C = -VI\,\mathrm{sen}\,2\omega t}$$

POTÊNCIA REATIVA CAPACITIVA (Var)



$$\boxed{Q_C = VI}$$

$$\boxed{Q_C = I^2 X_C}$$

$$\boxed{Q_C = \frac{V^2}{X_C}}$$

POTÊNCIA COMPLEXA

$$S = P + jQ = V\,I\,\cos\theta + j\,V\,I\,\operatorname{sen}\theta = V.I^{*}$$

S : POTÊNCIA APARENTE (VA)

P: POTÊNCIA ATIVA (W)

Q: POTÊNCIA REATIVA (Var)

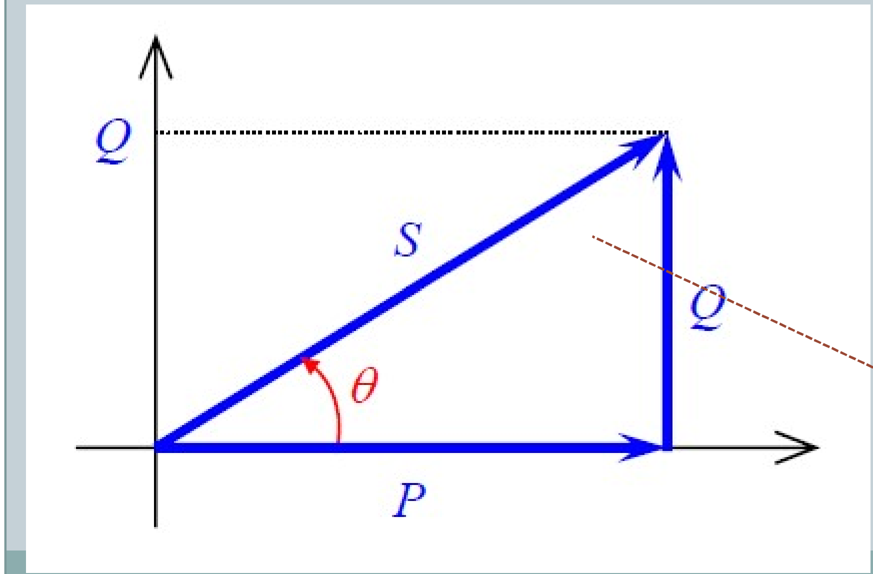
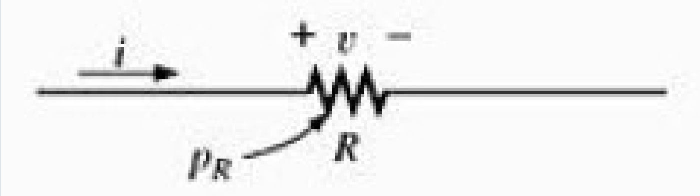


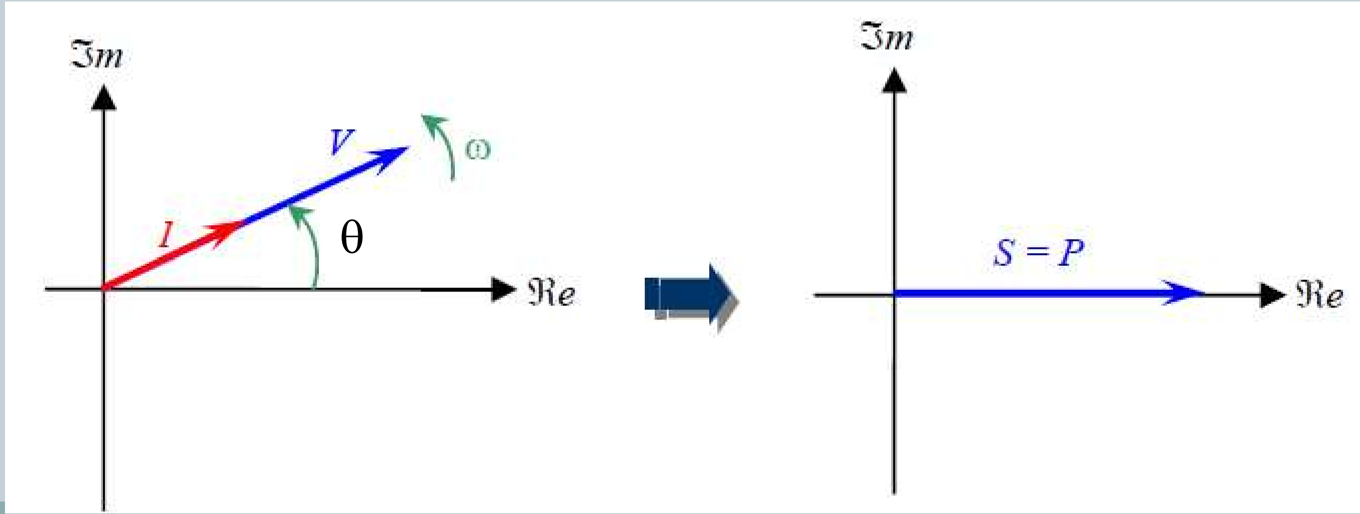
DIAGRAMA DE POTÊNCIAS E TRIÂNGULO DE POTÊNCIAS

CIRCUITOS RESISTIVOS



$$\dot{V} = V < \theta$$
$$\dot{I} = I < \theta$$

$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I}^* = \mathrm{V}<\theta \ . \ \mathrm{I}<-\theta \ =$$

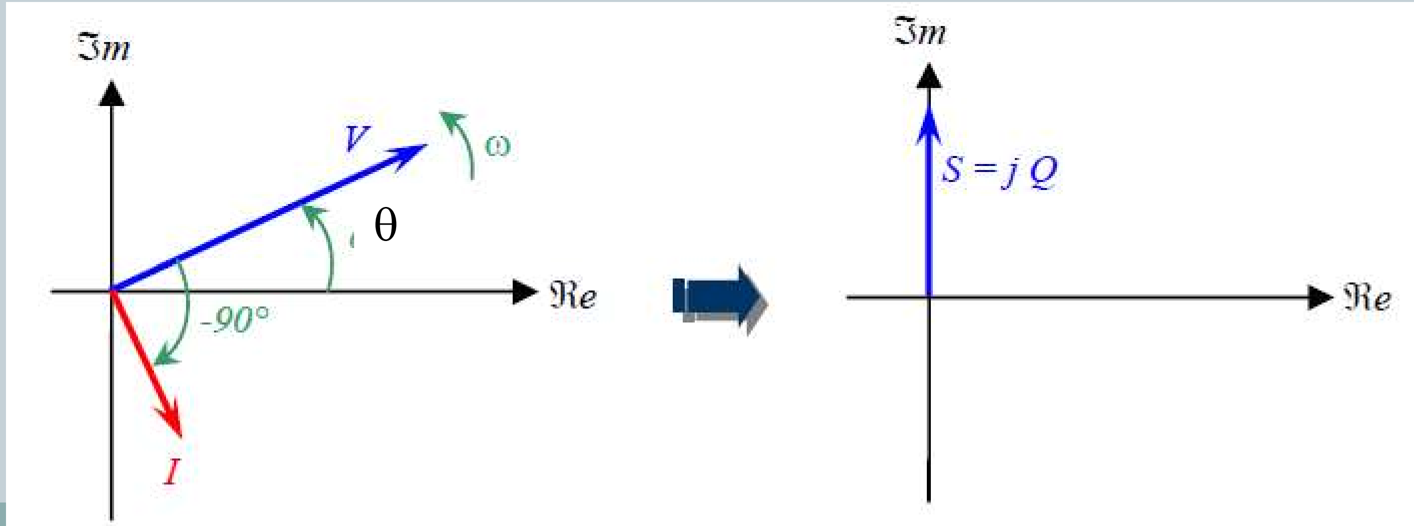


CIRCUITOS INDUTIVOS

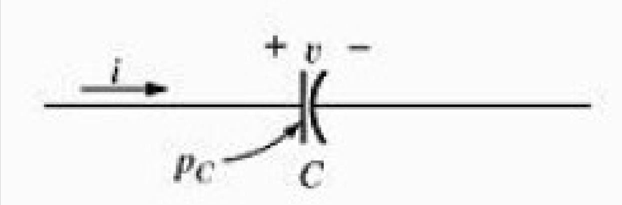
$$\dot{V} = V < \theta$$
$$\dot{I} = I < \theta - 90$$

$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I}^* = V<\theta \;.\; I<-\theta+90 = V.I <90 = jQ_L$$

$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I}^* = (jX_L.\, I) \;.\; I^* = jX_L \;.\; I^2 = jQ_L$$



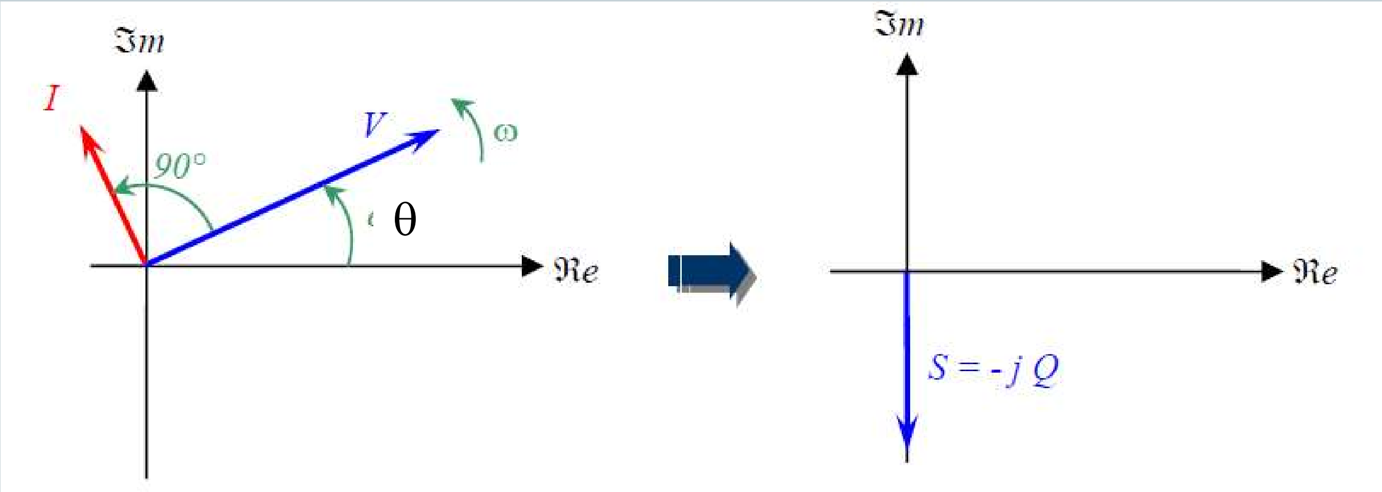
CIRCUITOS CAPACITIVOS



$$\dot{V} = V < \theta$$
$$\dot{I} = I < \theta + 90$$

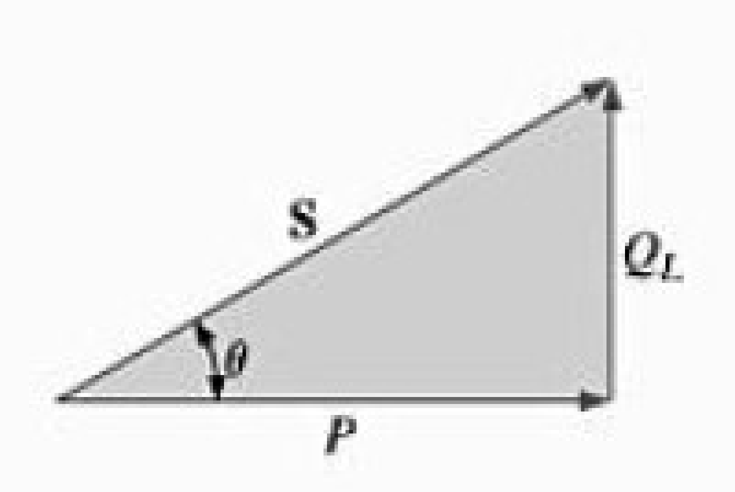
$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I}^* = V<\theta \;.\; I<-\theta-90 \;=\; V.I <-90 = -jQ$$

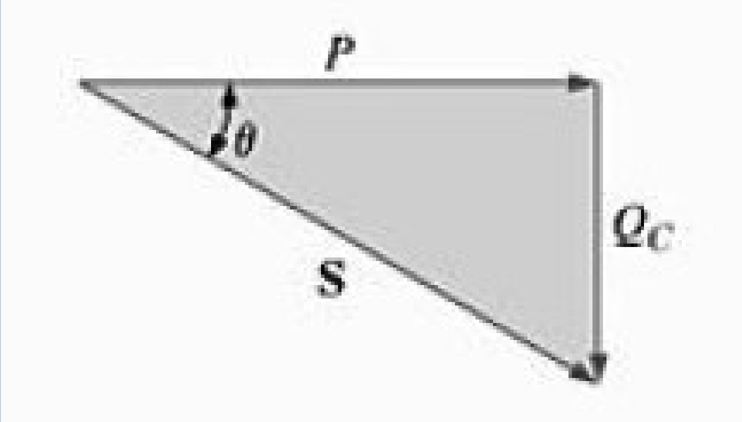
$$\dot{S} = \dot{V}.\dot{I}^* = (\,-jX_C.\; I) \;.\; I^* = -jX_C \;.\; I^2 \;=\; -jQ$$



TRIÂNGULO DE POTÊNCIAS

$$\mathbf{P} = P \angle 0^\circ \qquad \mathbf{Q}_L = Q_L \angle 90^\circ \qquad \mathbf{Q}_C = Q_C \angle -90^\circ$$





INDUTIVO

CAPACITIVO

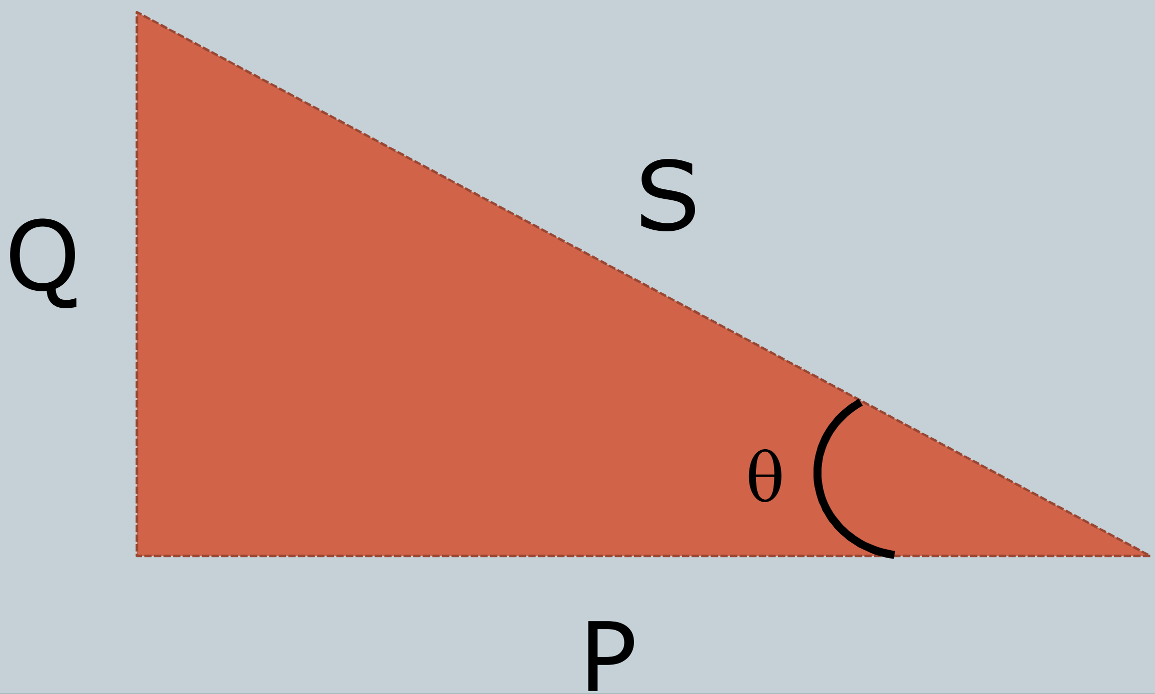
θ : ÂNGULO DE DEFASAGEM ENTRE A TENSÃO E A CORRENTE

TRIÂNGULO DE POTÊNCIAS

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$P = S\cos\theta$$

$$Q = S\,\mathrm{sen}\,\theta$$



$$tag\theta = \frac{Q}{P}$$

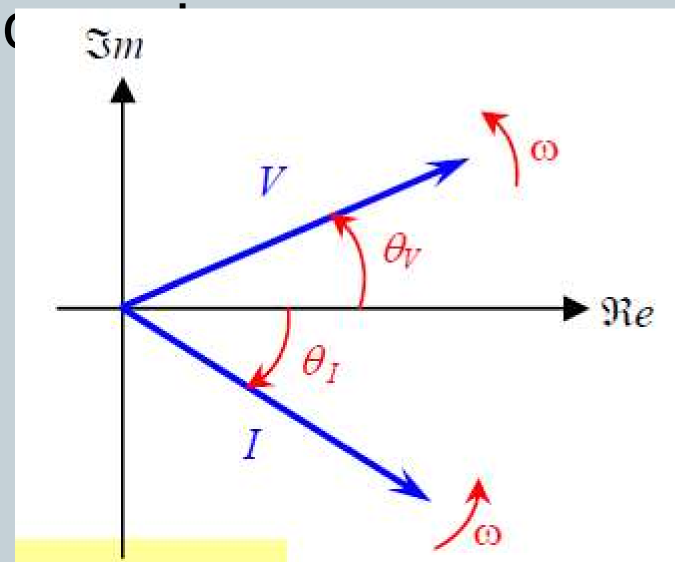
Potência Reativa - VAr

Potência Ativa - W

Potência Aparente - VA

FATOR DE POTÊNCIA

O fator de potência em circuitos de corrente alternada é definido como o cosseno do ângulo de fase da tensão em relação à c

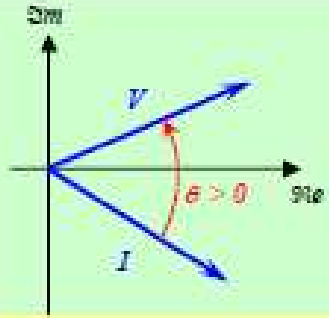
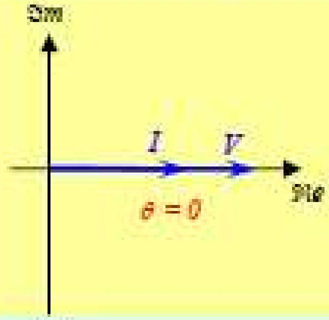
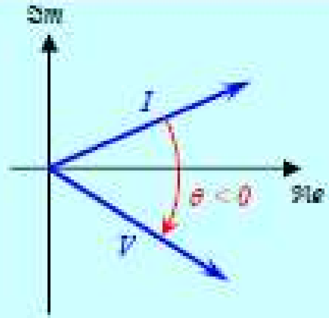


$$V = |V| \angle \theta_V$$
$$I = |I| \angle \theta_I$$

$$\textit{fator de potência} = fp \triangleq \cos\left[\arg\left(\frac{V}{I}\right)\right] = \cos(\theta_V - \theta_I)$$

ÂNGULO DA IMPEDÂNCIA

FATOR DE POTÊNCIA

$\theta > 0$	Corrente atrasada em relação à tensão	Fator de potência indutivo ou atrasado	
$\theta = 0$	Corrente em fase com a tensão	Fator de potência unitário	
$\theta < 0$	Corrente adiantada em relação à tensão	Fator de potência capacitivo ou adiantado	

CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

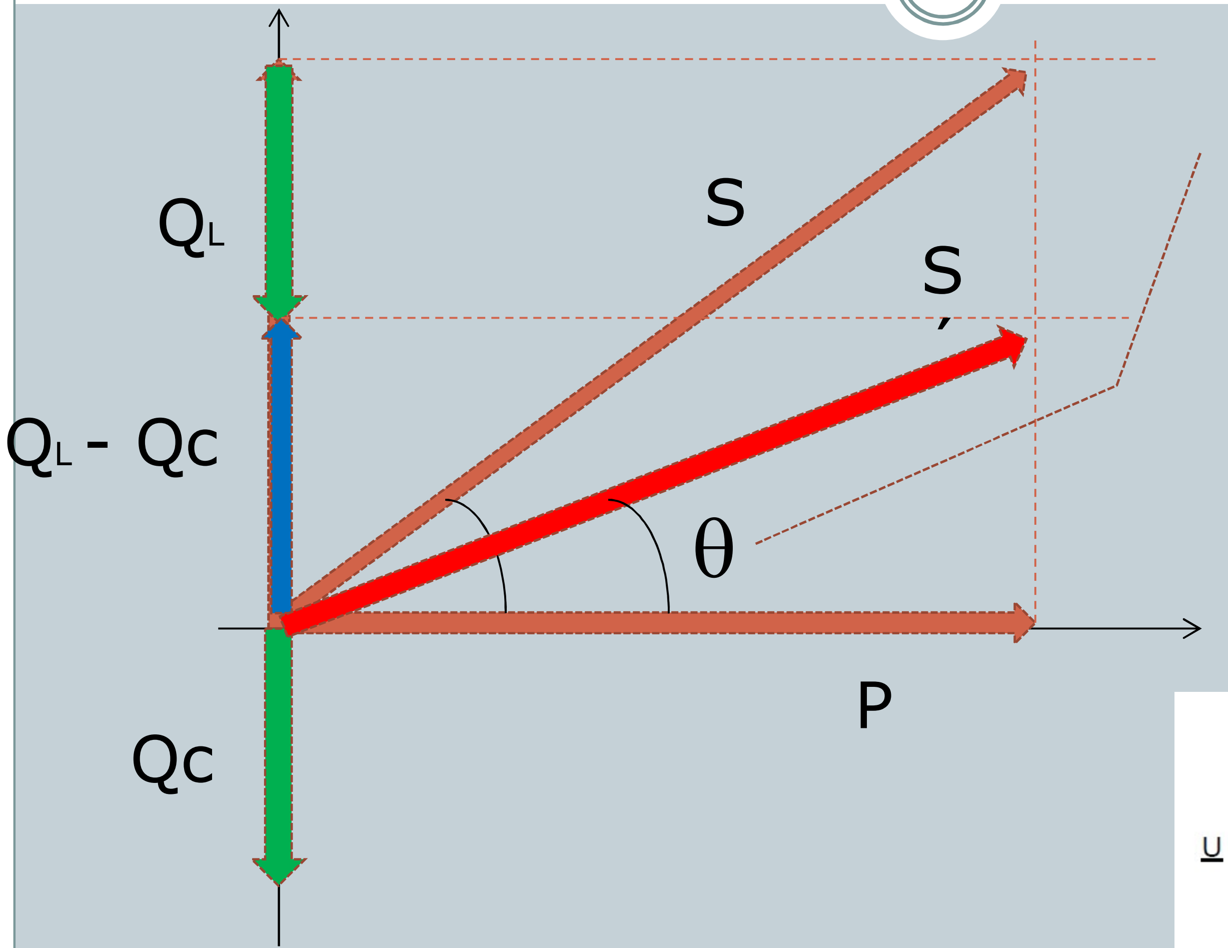
- O valor do fator de potência (FP) deverá ser calculado a partir dos valores registrados das potências ativa e reativa (P,Q) ou das respectivas energias (EA, ER), usando as seguintes fórmulas:

$$FP = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{EA}{\sqrt{EA^2 + ER^2}}$$

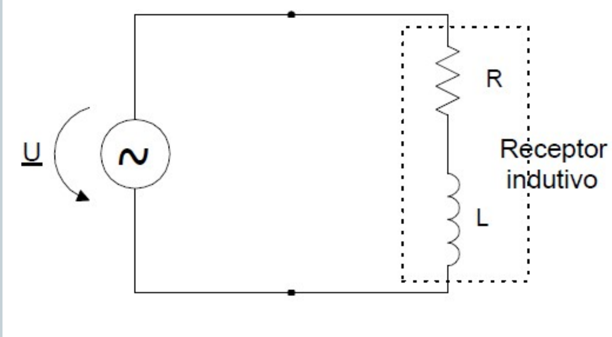
- O responsável por unidade consumidora conectada em BT ou MT deve assegurar que no ponto de conexão o fator de potência esteja compreendido entre 0,92 (noventa e dois centésimos) e 1,00 (um) indutivo, ou, 1,00 (um) e 0,92 (noventa e dois centésimos) capacitivo.

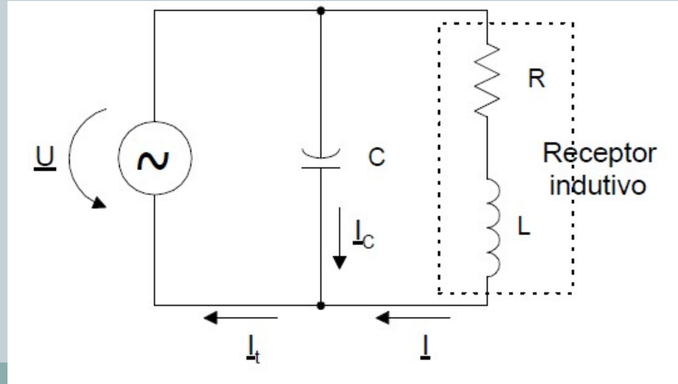
- O responsável por unidade consumidora conectada em AT deve assegurar que no ponto de conexão o fator de potência esteja compreendido entre 0,95 (noventa e cinco centésimos) e 1,00 (um) indutivo, ou, 1,00 (um) e 0,92 (noventa e dois centésimos) capacitivo.

CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

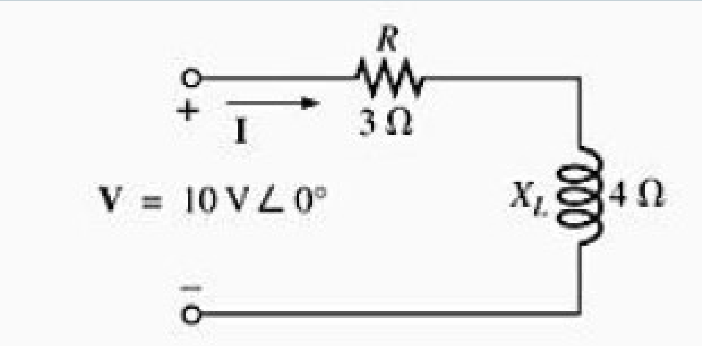


FATOR DE POTÊNCIA CORRIGIDO





CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA
exemplo

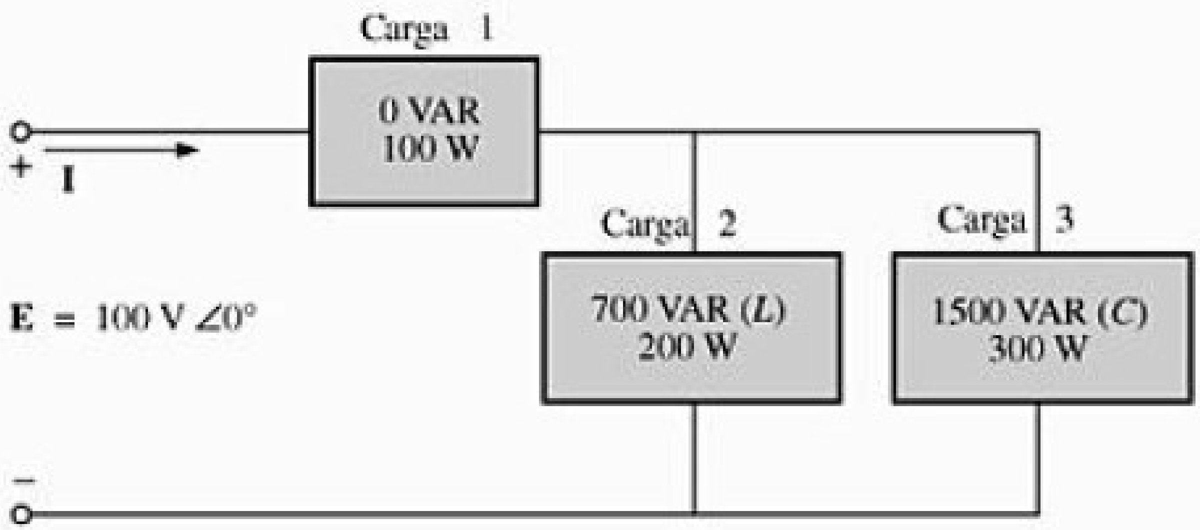


Pede-se:

a) A corrente I
b) Potência ativa, reativa e aparente
c) Fator de potência
d) Capacitor necessário para corrigir o fator de potência para unitário
e) Capacitor necessário para corrigir o fator de potência para 0,92

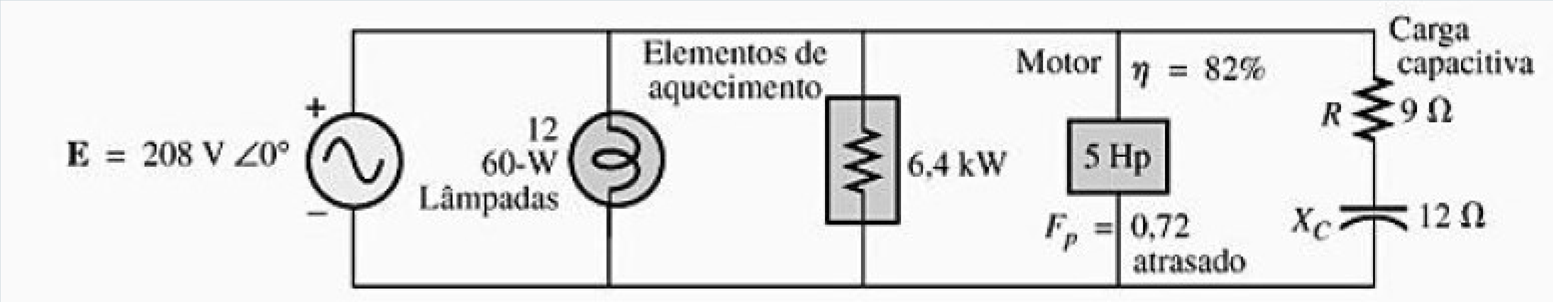
EXERCÍCIOS

Calcule o número total de watts, de volts-ampères reativos e de volts-ampères e o fator de potência F_p do circuito visto na Figura 19.17. Desenhe o triângulo de potências e determine a corrente em forma fasorial.



EXERCÍCIOS

a. Calcule as potências média, aparente, e reativa e o F_P para cada ramo.
b. Calcule a potência total em watts, em volts-ampères reativos e em volts-ampères e calcule ainda o fator de potência de sistema. Desenhe o triângulo de potências.
c. Calcule a corrente **I** fornecida pela fonte.



EXERCÍCIOS

Exemplo: Certa instalação possui uma potência nominal instalada de 128 kW, com fator de potência 0,8 indutivo, quando alimentada por uma tensão de 8,0 kV. Sabendo-se que a freqüência de serviço é 60 Hz, pede-se calcular:

(a) a corrente nominal desta instalação para carga completa;

(b) sua expressão no tempo;

(c) a potência reativa que esta instalação absorve.

(d) Desenhar o triângulo de potências correspondente à esta situação.

(e) Especificar um capacitor para ser ligado em paralelo com esta instalacão tal que o fator de potência resultante seja de 0,95 indutivo

(f) Qual vai ser o novo valor da corrente fornecida pela fonte à instalação?